Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

И. Я. БАКЕЛЬМАН

ИНВЕРСИЯ

КНИГИ
НИКИТИНА

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВЫПУСК 44

И. Я. БАКЕЛЬМАН

ИНВЕРСИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1966

513
Б 19
УДК 513.011.1

2-2-2
212-66

ПРЕДИСЛОВИЕ

В геометрии основную роль играют различные преобразования фигур. В школе подробно изучаются движения и гомотетии, а также их приложения. Важной особенностью этих преобразований является сохранение ими природы простейших геометрических образов: прямые переводятся в прямые, а окружности в окружности. Инверсия представляет собой более сложное преобразование геометрических фигур, при котором прямые уже могут переходить в окружности, и наоборот. Такой подход позволяет дать в применении к задачам элементарной геометрии единообразную методику изучения. Это прежде всего относится к задачам на построение и к теории пучков окружностей. Следует отметить, что рассмотрение указанных разделов элементарной геометрии без применения инверсии связано с привлечением разнообразных, большей частью довольно искусственных построений, носящих частный характер. Кроме указанных приложений, инверсия применяется также в пограничных вопросах элементарной и так называемой высшей геометрии. Речь идет об интерпретации геометрии Лобачевского на евклидовой плоскости. Интересны связи инверсии с комплексными числами, точнее, с простейшими функциями, аргументом и значениями которых являются комплексные числа.

Настоящая книга посвящена преобразованию инверсии и ряду ее приложений. Для удобства изложения материал разбит на три главы.

В первой главе подробно изучается преобразование инверсии и даются ее приложения к вопросам элементарной геометрии. Во второй главе показано, что преобразования, рассмотренные в главе I, могут быть заданы линейными и дробно-линейными функциями комплексного аргумента. Устанавливается также, что и обратно, такие функции описывают преобразования плоскости, сводящиеся к последовательному выполнению движений, гомотетии и, может быть, инверсий. В третьей главе излагается теоретико-групповая точка зрения обоснования геометрии, с помощью которой, опираясь на материал глав I и II, строятся кратко планиметрия Евклида и планиметрия Лобачевского.

Более подробное изложение вопросов, затронутых в главе III, читатель может найти в книге Н. В. Ефимова «Высшая геометрия».

В основу настоящей книги легли лекции, прочитанные автором в разное время школьникам г. Ленинграда.

И. Я. Бакельман

ГЛАВА I

ИНВЕРСИЯ И ПУЧКИ ОКРУЖНОСТЕЙ

§ 1. Простейшие преобразования плоскости

Идея преобразования одних геометрических фигур в другие будет играть основную роль в этой книге. В этом параграфе речь будет идти о фигурах на плоскости. Прежде всего уточним, что мы будем понимать под преобразованием геометрических фигур. Рассмотрим некоторую плоскость и пусть дан закон, с помощью которого каждой точке X этой плоскости ставится в соответствие точка X' той же плоскости. Этот закон сопоставления называется *преобразованием* плоскости, а точка X', соответствующая точке X, называется ее *образом*. Ниже преобразования плоскости будем обозначать греческими буквами. Если φ — преобразование плоскости, X — некоторая точка плоскости и X' — ее образ относительно преобразований φ, то мы часто будем пользоваться обозначением $X'=\varphi(X)$ или просто $\varphi(X)$.

Пусть на плоскости задано преобразование φ и пусть F — некоторая фигура на плоскости. Преобразование φ переводит каждую точку X фигуры F в некоторую точку X' — ее образ. Фигура F', состоящая из совокупности всех образов точек фигуры F, называется *образом фигуры* F относительно преобразования φ. Фигуру F' мы часто будем обозначать также $\varphi(F)$. Таким образом, преобразование φ переводит каждую фигуру F на плоскости в ее образ — фигуру $F'=\varphi(F)$ (рис. 1).

Как правило, точка и ее образ не совпадают. В том случае, когда точка X и ее образ — точка $\varphi(X)$ — совпадают, точка X называется *неподвижной точкой преобразования* φ.

Преобразование плоскости, сопоставляющее каждой точке плоскости X ее саму, называется *тождественным*. Другими словами, преобразование плоскости тождественно, если все точки плоскости относительно этого преобразования неподвижны. Тождественное преобразование плоскости будем в дальнейшем обозначать буквой ε.

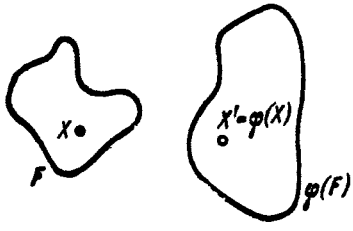

Рис. 1.

Пусть на плоскости задано некоторое преобразование φ. Фигура F называется *инвариантной относительно преобразования* φ, если образ F совпадает с F, т. е.

$$F = \varphi(F).$$

Инвариантная относительно некоторого преобразования фигура может не иметь ни одной неподвижной точки относительно этого преобразования. Действительно, если φ есть вращение плоскости вокруг точки O, то все точки плоскости, кроме точки O, перемещаются в новое положение. Совокупность концентрических окружностей с центром в точке O представляет собой совокупность инвариантных линий преобразования φ, при этом ни одна точка этих линий не является неподвижной (рис. 2).

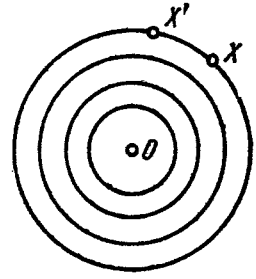

Рис. 2.

Рассмотрим более подробно простейшие преобразования плоскости.

1. Отражение в прямой (симметрия). Фиксируем на плоскости некоторую прямую l. Если точка X лежит на прямой l, то ей сопоставляется она сама, если же точка X не лежит на прямой l, то в качестве ее образа берется точка X', симметричиая с точкой X относительно прямой l (рис. 3).

Инвариантными фигурами относительно отражения в прямой l будут, во-первых, сама прямая l и, во-вторых, все фигуры, для которых осью симметрии является эта прямая. Несколько иивариаитных фигур изображено на рис. 4.

Все точки прямой l и только они являются неподвижными точками рассматриваемого нами преобразования.

2. Параллельный перенос. Это преобразование состоит в следующем: пусть на плоскости дан некоторый отрезок AB; если точка X не лежит на прямой l, то ее образ X' есть вершина параллелограмма, построенного на сторонах

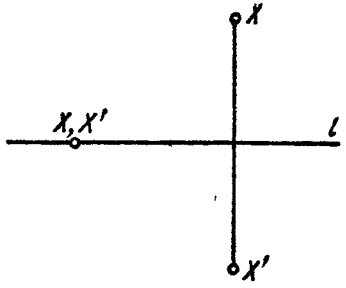

Рис. 3.

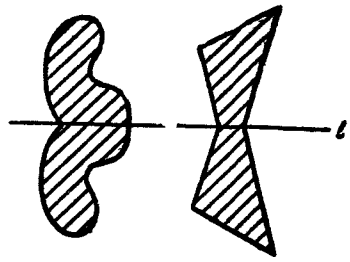

Рис. 4.

AB и AX, если же X лежит на прямой AB, то за X' принимается такая точка этой прямой, что отрезки AX и BX' равны, а отрезок XX' равен отрезку AB. Таким образом, параллельный перенос сводится к тому, что каждая точка плоскости сдвигается на отрезок AB в данном направлении (рис. 5).

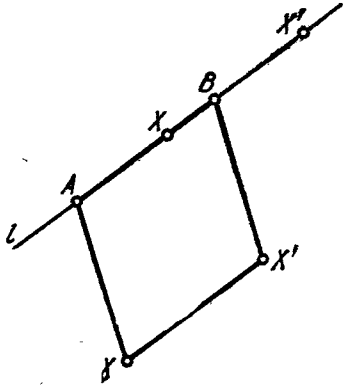

Рис. 5.

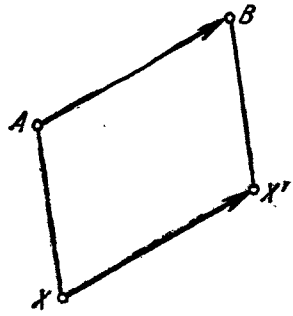

Рис. 6.

С помощью векторов параллельный перенос описывается так: пусть $\overrightarrow{AB}$ — вектор с началом в точке A и концом в точке B, пусть, далее, X—произвольная точка плоскости и X' — ее образ. Тогда векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{XX'}$ равны (рис. 6).

Поэтому параллельный перенос можно рассматривать как сдвиг каждой точки X на вектор, равный вектору $\overline{AB}$.

Если вектор $\overline{AB}$ нулевой (точка A совпадает с точкой B), то параллельный перенос на вектор $\overline{AB}$ сводится к тождественному преобразованию.

Пусть φ — параллельный перенос на ненулевой вектор $\overline{AB}$. Очевидно, что преобразование φ не имеет неподвижных точек. Инвариантными фигурами относительно преобразования φ будут, например, все прямые, параллельные прямой AB. Можно указать и другие инвариантные фигуры. На рис. 7 и 8 изображены фигуры L и Q, инвариантные относительно преобразования φ. Их отдельные

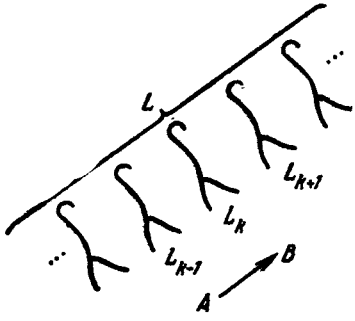

Рис. 7.

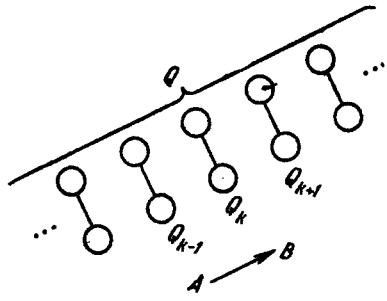

Рис. 8.

элементы — линии ..., L_{k-1}, L_k, L_{k+1}, ... на рис. 7 и фигуры ..., Q_{k-1}, Q_k, Q_{k+1}, ... на рис. 8 таковы, что L_k или Q_k есть соответственно образ L_{k-1} или Q_{k-1} при преобразовании φ.

3. Вращение вокруг точки. Фиксируем на плоскости некоторую точку O. Пусть X — произвольная точка плоскости. Отрезок OX повернем вокруг точки O на некоторый постоянный угол α (если $\alpha>0$, то поворот совершается против часовой стрелки, а если $\alpha<0$, то по часовой стрелке), при этом точка X займет новое положение X'. Точку X' и будем считать образом точки X. Точке O сопоставляется она сама. Указанное выше преобразование плоскости называется *вращением плоскости вокруг точки O на угол α*.

Если $\alpha=0$, то вращение сводится к тождественному преобразованию.

Пусть φ — вращение вокруг точки O на ненулевой угол α. Очевидно, что единственной неподвижной точкой

преобразования φ будет точка O. Инвариантными фигурами будут, например, окружности и круги, имеющие центр в точке O. Если угол α таков, что

$$\alpha=\frac{2\pi}{n},$$

где n — натуральное число, то инвариантными фигурами будут те правильные m-угольники, вписанные в окружно-

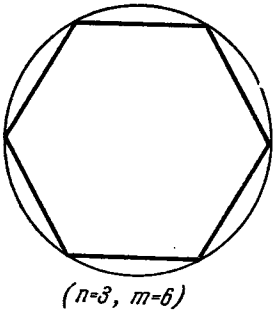

Рис. 9.

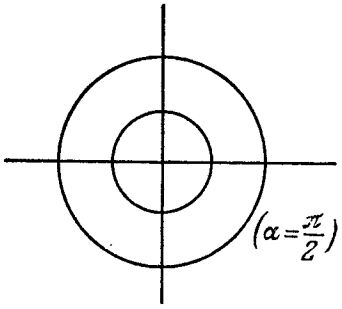

Рис. 10.

сти с центром в точке O, у которых число сторон кратно числу n (рис. 9). На рис. 10 изображена более сложная инвариантная фигура.

4. Движение. *Движениями* называются преобразования плоскости, не меняющие расстояний между точками. Все рассмотренные выше преобразования плоскости, как нетрудно видеть, являются движениями. Справедливо в известном смысле обратное предложение. Именно, любое движение на плоскости сводится либо к вращению, либо к параллельному переносу, либо к последовательному выполнению не более чем трех отражений в некоторых прямых. Доказательство этого факта мы предоставляем читателю.

5. Гомотетия. На плоскости фиксируем некоторую точку O. Пусть далее $k>0$ — некоторая постоянная. *Гомотетией с центром в точке O и коэффициентом k* называется преобразование плоскости, переводящее точку O в себя, а произвольную точку X, отличную от O, в точку X' такую, что X' лежит на луче OX и

$$OX'=k\cdot OX.$$

Если $k=1$, то гомотетия сводится к тождественному преобразованию. Если $k\neq 1$, то единственной неподвижной точкой этого преобразования будет центр гомотетии — точка O. Инвариантными фигурами гомотетии будут, очевидно, лучи, имеющие своей вершиной центр подобия.

Можно указать довольно простой способ построения более сложных инвариантных фигур. Пусть F — некоторая фигура на плоскости (рис. 11). Через mF будем обозначать фигуру F', которая является образом F относительно гомотетии с центром в точке O и коэффициентом m.

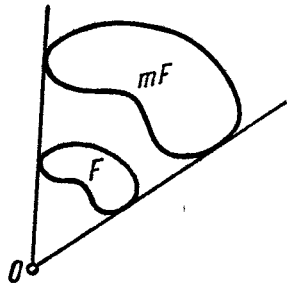

Рис. 11.

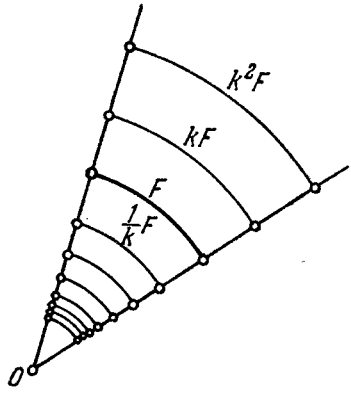

Рис. 12.

Обозначим через φ гомотетию с коэффициентом k и центром O. Пусть F — некоторая фигура на плоскости. Построим фигуры

$$\ldots, \frac{1}{k^m}F, \quad \frac{1}{k^{m-1}}F, \ldots, \quad \frac{1}{k}F, F, kF, \ldots, k^{m-1}F, k^mF, \ldots$$

Фигура G, представляющая собой объединение всех фигур

$$\ldots, \frac{1}{k^m}F, \frac{1}{k^{m-1}}F, \ldots, \frac{1}{k}F, F, kF, k^2F, \ldots, k^{m-1}F, k^mF, \ldots$$

(рис. 12), как нетрудно проверить, является инвариантной относительно преобразования φ.

В заключение сформулируем понятия равных и подобных фигур, играющие важнейшую роль в элементарной геометрии.

Две фигуры F_1 и F_2 называются *равными*, если существует движение, переводящее фигуру F_1 в F_2. Фигуры F_1 и F_2 называются *подобными*, если существует преобразование гомотетии, переводящее фигуру F_1 в фигуру F_2', равную F_2.

§ 2. Стереографическая проекция. Бесконечно удаленная точка плоскости

Понятие преобразования, рассмотренное в § 1 для случая плоскости, очевидным образом переносится на случай любых геометрических фигур. Действительно, сопоставляя по определенному закону каждой точке X фигуры M некоторую точку X' другой фигуры N, получаем преобразование φ фигуры M в фигуру N. Если при этом образ фигуры M покрывает всю фигуру N, то говорят, что φ есть *преобразование M на N*.

Для изучения преобразования инверсии весьма полезно рассмотреть предварительно одно специальное преобразование сферы на плоскость. Это преобразование называется *стереографической проекцией* и состоит в следующем: пусть K — сфера и P — плоскость, касающаяся K в точке S (рис. 13). Точку S будем называть *южным полюсом* K, а диаметрально противоположную ей точку N — *северным полюсом*. Пусть X — произвольная точка сферы K, отличная от точки N. Тогда луч NX пересекает плоскость P в некоторой точке X' (рис. 13). Преобразование, относящее каждой точке X сферы K, отличной от точки N, точку пересечения X' плоскости P с лучом NX, и называется стереографической проекцией. Очевидно, что при этом покрывается вся плоскость P. Итак, стереографическая проекция преобразует сферу K с исключенной точкой N на всю плоскость P.

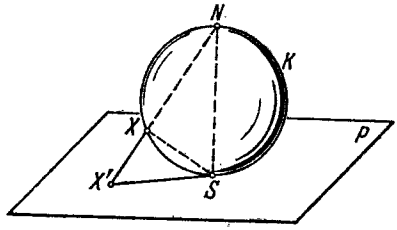

Рис. 13.

Рассмотрим, как ведет себя образ точки X на плоскости P, когда точка X неограниченно приближается к точке N по сфере K. Из подобия прямоугольных треугольников $X'NS$ и XNS (рис. 14) имеем

$$\frac{XN}{XS}=\frac{NS}{X'S}.$$

Отсюда

$$X'S=\frac{NS\cdot XS}{NX}.$$

Обозначим через R радиус сферы K. Так как точка X находится достаточно близко к северному полюсу N, то $XS > R$ и потому

$$X'S > \frac{2R^2}{NX}.$$

Отсюда видно, что когда точка X неограниченно приближается к точке N ($NX \to 0$), то длина отрезка $X'S$ неограниченно возрастает и точка X' неограниченно удаляется от точки S. Следовательно, точке N при стереографической проекции нельзя сопоставить никакой точки плоскости P. Для того чтобы распространить стереографическую проекцию на всю сферу K, т. е. чтобы для северного полюса N был определен образ на плоскости P, необходимо пополнить плоскость P новой точкой. К точкам плоскости P, которые мы ниже иногда будем называть обыкновенными, добавляется новая точка O_∞, которую мы будем называть *бесконечно удаленной*. Далее на протяжении всей книги мы будем считать, что плоскость P всегда пополнена бесконечно удаленной точкой O_∞. Сопоставляя теперь северному полюсу N сферы K точку O_∞, получим, что стереографическая проекция преобразует сферу K на плоскость P.

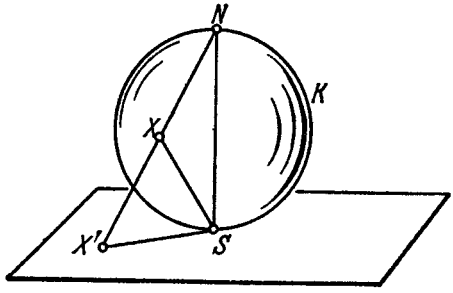

Рис. 14.

Рассмотрим некоторые свойства бесконечно удаленной точки. Пусть l' — произвольная прямая на плоскости P. Проведем плоскость через точку N и прямую l' (рис. 15). Эта плоскость пересекает сферу K по некоторой окружности l, проходящей через точку N. Прямая l', очевидно, является образом окружности l при стереографической проекции. С другой стороны, образ всякой окружности h, расположенной на сфере K и проходящей через точку N, представляет собой прямую на плоскости P, поскольку плоскость, в которой лежит окружность h, пересекается с плоскостью P по прямой. Отсюда вытекает, что стереографическая проекция устанавливает взаимно однозначное

соответствие между совокупностью всех окружностей, лежащих на сфере K и проходящих через точку N, и совокупностью всех прямых плоскости P. Поэтому любая прямая на плоскости P должна проходить через бесконечно удаленную точку O_∞, которая при стереографической проекции является образом точки N.

Пусть l'_1— некоторая окружность на плоскости P. Так как расстояния точек l'_1 от южного полюса S сферы K не больше, чем $d+r'$, где d — расстояние центра l'_1 от точки S, а r'— радиус l'_1, то линия l_1, которая стереографической проекцией переводится в l'_1 (рис. 15), не проходит

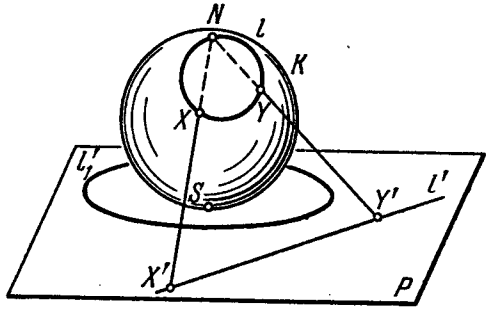

Рис. 15.

через точку N. Поэтому ни одна окружность на плоскости P не проходит через бесконечно удаленную точку O_∞.

Как мы знаем, положение окружности на плоскости полностью определяется любой тройкой ее точек, не лежащих на одной прямой. Положение прямой на плоскости также определяется тройкой ее точек, из которых две могут быть выбраны произвольно, а третья обязательно является бесконечно удаленной. Поэтому на прямую можно смотреть как на окружность, проходящую через бесконечно удаленную точку.

Рассмотрим теперь на сфере K семейство всех окружностей, плоскости которых параллельны плоскости P. Будем считать, что в это семейство входят точки S и N, как окружности нулевого радиуса. Стереографическая проекция (рис. 16) переводит это семейство окружностей в совокупность всех концентрических окружностей на плоскости P с центром в точке S, которая включает в себя точку S и

бесконечно удаленную точку. Так как касание сферы K с плоскостью P можно взять в любой точке плоскости P (для этого достаточно переместнть сферу K параллельно по плоскости P), то мы будем считать, что любая система

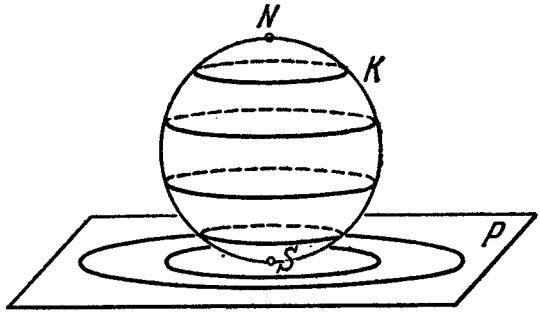

Рис. 16.

концентрических окружностей содержит в себе общий центр всех окружностей и бесконечно удаленную точку плоскости.

§ 3. Инверсия

Пусть на плоскости P фиксирована окружность с центром в точке O и радиусом r. *Инверсией с центром в точке O и радиусом r* называется преобразование плоскости, которое описывается следующим законом: точке X, отличной от точек O и O_∞, ставится в соответствие точка X' на луче OX такая, что

$$OX' = \frac{r^2}{OX}$$

(рис. 17), точке O — бесконечно удаленная точка O_∞ и, наконец, бесконечно удаленной точке O_∞ — точка O.

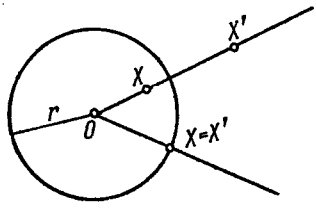

Рис. 17.

Введенная выше окружность с центром в точке O и радиусом r называется *окружностью инверсии*. Если X лежит на окружности инверсии, то $OX=r$ и, следовательно,

$$OX' = \frac{r^2}{OX} = r.$$

Так как точки X и X' лежат на одном луче OX, то точки X и X' совпадают. Отсюда следует, что все точки окружности инверсии являются неподвижными точками, а сама окружность инверсии является инвариантной фигурой.

Точки X, лежащие внутри окружности инверсии и отличные от точки O, переводятся инверсией в точки, лежащие вне окружности инверсии, и наоборот, точки, лежащие вне окружности инверсии, переводятся во внутренние точки по отношению к этой окружности.

Действительно, в первом случае имеем $OX<r$, и потому

$$OX'=\frac{r^2}{OX}>r,$$

что и показывает, что X' лежит вне окружности инверсии. Аналогично рассматривается второй случай.

Итак, любая точка X и ее образ—точка X'— лежат на одном луче OX по разные стороны от окружности инверсии, если точка X не лежит на этой окружности (рис. 17).

Если точка X неограниченно приближается к точке O ($OX\to 0$), то образ ее — точка X'— неограниченно удаляется от точки O. Это видно из соотношения

$$OX'=\frac{r^2}{OX}\to+\infty$$

(рис. 18). Отсюда следует, что точка X' стремится к бесконечно удаленной точке. Аналогично устанавливается, что при неограниченном удалении точки X от точки O ее образ X' неограниченно приближается к точке O. Тем самым оправдано, что по определению инверсии центр инверсии переходит в бесконечно удаленную точку, и наоборот.

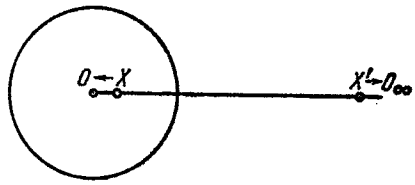

Рис. 18.

Пусть произвольная точка X подвергается последовательно действию одной и той же инверсии φ. Обозначим через X' точку $\varphi(X)$, а через X'' — точку $\varphi(X')$. Тогда все три точки X, X', X'' лежат на одном луче OX и, кроме того, справедливы соотношения

$$OX'=\frac{r^2}{OX},\qquad OX''=\frac{r^2}{OX'}.$$

Отсюда получаем

$$OX'' = \frac{r^2 \cdot OX}{r^2}$$

и, следовательно,

$$OX'' = OX.$$

Итак, если X — произвольная точка плоскости, отличная от центра инверсии и бесконечно удаленной точки, то дважды выполненная инверсия φ переводит точку X снова в эту же точку X. Если точка X совпадает с точкой O или с бесконечно удаленной точкой, то тот же результат сохраняет силу, т. е. точка X применением последовательно дважды одной и той же инверсии φ переводится снова в точку X. Это вытекает непосредственно из определения инверсии.

Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Преобразование плоскости, представляющее собой последовательно выполненную дважды одну и ту же инверсию, есть тождественное преобразование.*

Наконец, отметим, что если при инверсии φ точка X переходит в точку X', то X' при этой же инверсии φ переходит в X, т. е. X и X' «меняются местами». Подобным же свойством обладает отражение в прямой. Поэтому иногда инверсию называют «отражением в окружности».

§ 4. Свойства инверсии

На протяжении этого параграфа через φ обозначается инверсия на плоскости, имеющая центр в точке O, радиус которой равен r.

Прежде всего установим одну простую лемму, которая играет существенную роль при изучении свойств инверсии.

Лемма 1. *Пусть инверсия φ переводит точки A и B соответственно в точки A' и B' (предполагается, что точки A и B отличны от точки O и бесконечно удаленной точки и, кроме того, точки O, A, B не лежат на одном луче с началом в точке O). Тогда треугольники OAB и $OA'B'$ подобны и*

$$\angle OAB = \angle OB'A', \quad \angle OBA = \angle OA'B'.$$

Доказательство. У треугольников OAB и $OA'B'$ (рис. 19) имеется общий угол, а стороны, заключающие этот угол, пропорциональны. Действительно, так как

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB' = r^2,$$

то

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OB'}{OA'}.$$

Отсюда следует, что треугольники OAB и $OA'B'$ подобны. Но так как против пропорциональных сторон в подобных треугольниках лежат равные углы, то из соотношения

$$\frac{OA}{OB}=\frac{OB'}{OA'}$$

следует равенство соответствующих углов:

$$\angle OAB=\angle OB'A',$$
$$\angle OBA=\angle OA'B'.$$

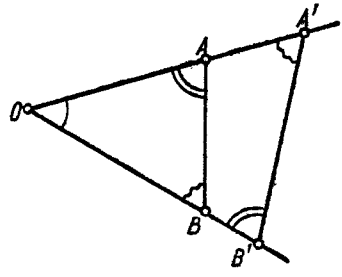

Рис. 19.

Лемма доказана.

Т е о р е м а 1. *Инверсия* φ *переводит любую прямую, проходящую через центр инверсии, саму на себя, т. е. прямая, проходящая через центр инверсии, есть инвариантная фигура.*

Доказательство этой теоремы непосредственно вытекает из определения инверсии.

Т е о р е м а 2. *Инверсия* φ *преобразует прямую, не проходящую через центр инверсии* O, *в окружность, проходящую через точку* O.

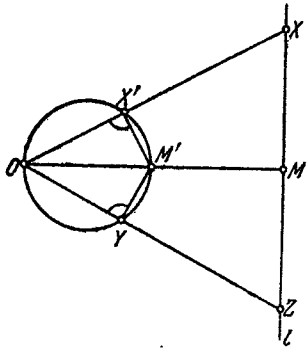

Рис. 20.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть l — прямая, не проходящая через центр инверсии — точку O. Опустим из точки O перпендикуляр на прямую l, и пусть он пересекает l в точке M (рис. 20). Пусть M' — образ точки M относительно инверсии φ. Точка M', очевидно, лежит на луче OM. На прямой l рассмотрим произвольную точку X, отличную от бесконечно удаленной точки O_∞. Пусть X' — образ X относительно инверсии φ. Тогда по лемме 1 имеем

$$\angle OX'M'=\angle OMX=\frac{\pi}{2}.$$

Поэтому точка X' лежит на окружности K, построенной на отрезке OM' как на диаметре. Так как точка X взята на прямой l произвольно, то образ прямой l при инверсии φ представляет собой совокупность точек l', расположенную на окружности K.

Докажем теперь, что множество точек l' совпадает с окружностью K. Прежде всего отметим, что точка O принадлежит множеству l'. Это вытекает из того, что прямая l проходит через бесконечно удаленную точку O_∞, а эту точку инверсия φ переводит в точку O. Пусть теперь Y — произвольная точка окружности K. Луч OY пересекает прямую l в некоторой точке Z (мы предполагаем, что точка Y отлична от точки O, поэтому луч OY не параллелеи прямой l). Докажем, что точка Z переводится инверсией φ в точку Y. Так как точки Y и Z лежат на одном луче OZ, то нам нужно лишь проверить, что выполняется соотношение

$$OY = \frac{r^2}{OZ}.$$

По построению треугольники OYM' и OMZ (рис. 20) подобны. Поэтому

$$\frac{OY}{OM'} = \frac{OM}{OZ}.$$

Отсюда

$$OY = \frac{OM \cdot OM'}{OZ} = \frac{r^2}{OZ}.$$

Итак, доказано, что точка Y есть образ точки Z при инверсии φ.

Таким образом, образ прямой l совпадает с окружностью K.

Теорема доказана.

Построение, проведенное в доказательстве теоремы 2, дает способ построения образа заданной прямой относительно инверсии φ с помощью циркуля и линейки. Из центра инверсии — точки O — опускаем перпендикуляр OM (рис. 20) на прямую l. Строим точку M', являющуюся образом точки M (при этом приходится строить отрезок длиной, равной $\frac{r^2}{OM}$). Образ прямой l относительно инверсии — окружность l' — строится на отрезке OM' как на диаметре.

В том частном случае, когда прямая l касается окружности инверсии, точки M и M' совпадают и потому окружность l' строится на отрезке OM как на диаметре.

Теорема 3. *Инверсия* φ *преобразует окружность, проходящую через центр инверсии* O, *в прямую, не проходящую через точку* O.

Доказательство этой теоремы мы предлагаем провести читателю самостоятельно.

Теорема 4. *Инверсия* φ *преобразует окружность, не проходящую через центр инверсии* O, *в некоторую окружность, также не проходящую через центр инверсии.*

Доказательство. Пусть K — окружность, не проходящая через центр инверсии O. Через точку O проведем прямую g так, чтобы она пересекла окружность K по диаметру AB (рис. 21). Пусть A' и B' — образы точек A и B относительно инверсии φ, X — произвольная точка окружности K и X' — ее образ.

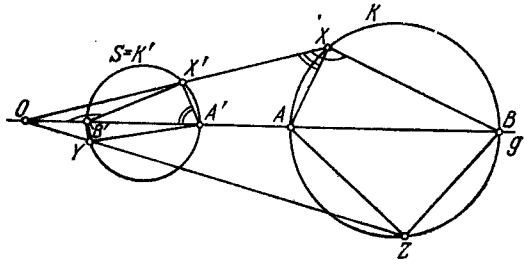

Рис. 21.

По лемме 1 треугольники OXA и $OX'A'$ подобны и потому

$$\angle OA'X' = \angle OXA;$$

аналогично треугольники OXB и $OX'B'$ подобны и, следовательно,

$$\angle OB'X' = \angle OXB.$$

Так как

$$\angle A'X'B' = \angle OB'X' - \angle OA'X' = \angle OXB - \angle OXA = \angle AXB = \frac{\pi}{2},$$

то отсюда вытекает, что отрезок $A'B'$ из точки X' виден под углом $\frac{\pi}{2}$ и, стало быть, точка X' лежит на окружности S, построенной на отрезке $A'B'$ как на диаметре. Поскольку точка X на окружности K была выбрана произвольно,

то K' — образ окружности K при инверсии φ — расположен на окружности S. Докажем, что K' совпадает с окружностью S. Пусть Y — произвольная точка окружности S и Z — точка на луче OY такая, что

$$OZ=\frac{r^2}{OY}.$$

Очевидно, что точка Z переводится инверсией φ в точку Y. Далее, из соотношений

$$OA\cdot OA'=r^2,$$
$$OB\cdot OB'=r^2,$$
$$OZ\cdot OY=r^2$$

и леммы 1 вытекает, что

$$\angle AZB=\angle OZB-\angle OZA=\angle OB'Y-\angle OA'Y=$$
$$=\angle A'YB'=\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, точка Z лежит на окружности K. Отсюда вытекает, что фигуры S и K' совпадают. Так как по построению концы диаметра окружности K — точки A, B— отличны от O и расположены на луче OA по одну сторону от точки O, то окружность K' не проходит через точку O. (Впрочем, последнее утверждение вытекает также и из того факта, что никакая окружность не проходит через бесконечно удаленную точку O_∞.)

Построения, проведенные выше, дают возможность строить образ окружностей при инверсии с помощью циркуля и линейки. Остановимся на этом вопросе более подробно.

а) Окружность K не проходит через центр инверсии. В этом случае проводим из точки O луч, который пересекает окружность K по диаметру AB, для точек A и B строим их образы A' и B'. Окружность K' — образ окружности K относительно инверсии φ — есть окружность, построенная на отрезке $A'B'$ как на диаметре (рис. 22).

б) Окружность K проходит через центр инверсии. В этом случае согласно теореме 3 образ K есть прямая K'. Из точки O проводим луч OA (рис. 23), который пересекает K по диаметру OA. Для точки A строим ее образ — точку A'. Прямая, проходящая

через точку A' перпендикулярно лучу OA, и есть искомая прямая K'.

Построение прямой K' значительно упрощается в двух случаях:

1) если окружность K пересекает окружность инверсии в двух точках B и C, то прямая K' совпадает с прямой BC (рис. 24);

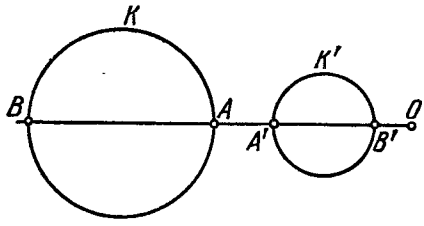

Рис. 22.

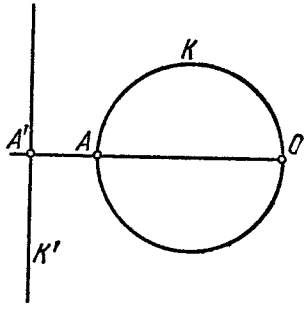

Рис. 23.

2) если K касается окружности инверсии, то K' есть касательная к окружности инверсии в точке касания K с окружностью инверсии (рис. 25).

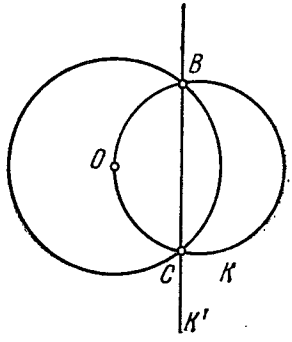

Рис. 24.

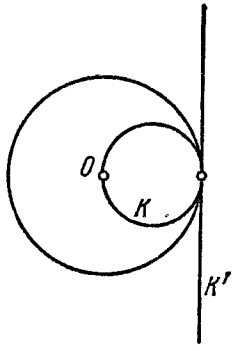

Рис. 25.

Перейдем теперь к вопросу о характере изменения углов между кривыми под действием инверсии φ. Как известно, углом между двумя кривыми L_1 и L_2 в точке их пересечения называется наименьший из вертикальных углов между касательными к этим кривым в рассматриваемой точке.

Можно доказать, что при инверсии углы между кривыми сохраняются. Ниже это предложение доказывается для окружностей и прямых.

Теорема 5. *При инверсии* φ *угол между прямыми равен углу между их образами.*

Доказательство. Здесь могут представиться три случая:

1) прямые l_1 и l_2 проходят через центр инверсии φ;

2) одна из прямых l_1 и l_2 проходит через центр инверсии;

3) ни l_1, ни l_2 не проходят через центр инверсии.

В первом случае утверждение теоремы очевидно. Рассмотрим случаи 2) и 3). В случае 2) (рис. 26) будем считать

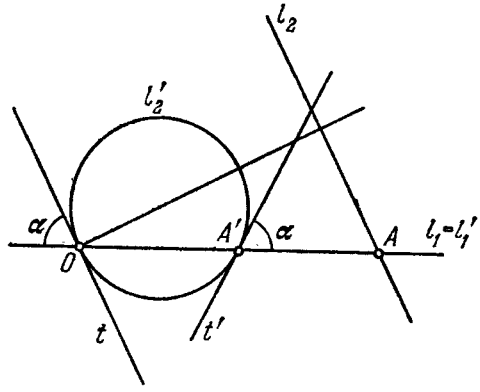

Рис. 26.

для определенности, что прямая l_1 проходит через центр инверсии — точку O. Тогда инверсия φ переводит прямую l_1 саму в себя, т. е. образ прямой l_1 совпадает с этой прямой. Прямая l_2 не проходит через центр инверсии и потому переводится инверсией в некоторую окружность l'_2, проходящую через точку O. Касательная t к окружности l'_2 в точке O параллельна прямой l_2.

Относительно взаимного расположения прямых l_1 и l_2 могут представиться две возможности:

а) прямые l_1 и l_2 параллельны;

б) l_1 и l_2 пересекаются в некоторой точке A.

Если l_1 и l_2 параллельны, то угол между ними, очевидно, равен нулю. Но прямая l_1 проходит через точку

O и параллельна l_2. Поэтому она необходимо будет совпадать с касательной t к окружности l'_2 в точке O. Отсюда следует, что угол между l'_1 и l'_2 равен нулю и, следовательно, утверждение теоремы в случае а) доказано.

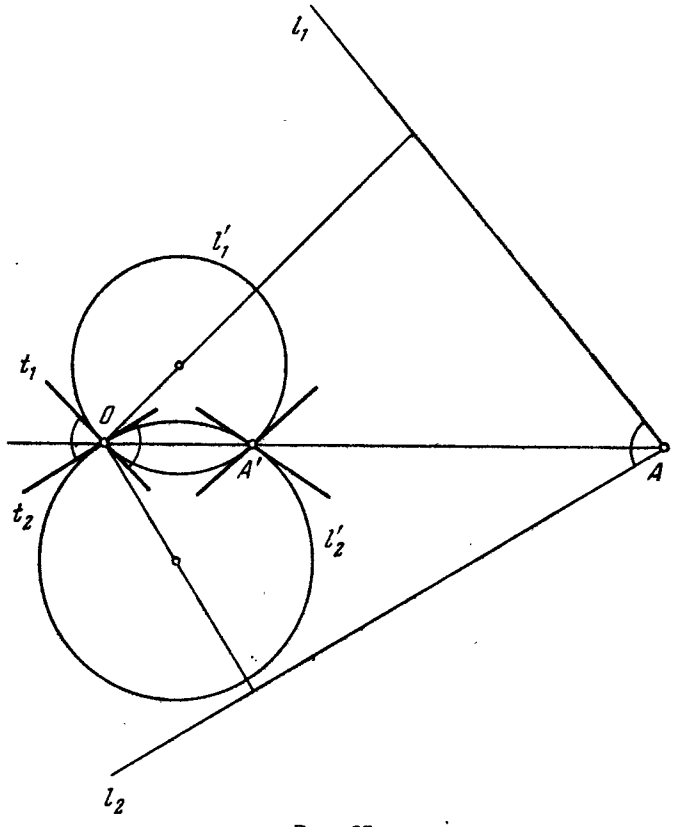

Рис 27.

Пусть теперь l_1 и l_2 не параллельны и A — точка их пересечения. Обозначим через α наименьший из вертикальных углов между $l_1 = l'_1$ и прямой l_2 или, что то же, прямой t. Точка A при инверсии переходит в некоторую точку A', в которой прямая l'_1 пересекается с окружностью l'_2. Но прямая l'_1 или, что то же, прямая OA' составляет с касательной t' в точке A' к окружности l'_2 такие же

вертикальные углы, что и с касательной t. Отсюда немедленно следует, что угол между l'_1 и l'_2 в точке A' равен α. Случай 2) полностью доказан.

Третий случай (рис. 27) доказывается аналогичными рассуждениями. Заметим только, что если прямые l_1 и l_2 параллельны, то соответствующие окружности l'_1 и l'_2 имеют в точке O общую касательную и, стало быть, составляют между собой нулевой угол. Отсюда угол между l'_1 и l'_2 равен углу между l_1 и l_2. Если же прямые l_1 и l_2 пересекаются, то, как видно из рис. 27, угол между окружностями l'_1 и l'_2 в точке O равен углу между прямыми l_1 и l_2, ибо касательные t_1 и t_2 к этим окружностям в точке O параллельны прямым l_1 и l_2. Отсюда и вытекает утверждение теоремы.

Имеют место следующие теоремы, доказательство которых мы предоставляем читателю в виде полезных упражнений.

Теорема 6. *Угол между окружностями равен углу между образами этих окружностей относительно инверсии.*

Теорема 7. *Угол между окружностью и прямой равен углу между образами этих фигур относительно инверсии.*

§ 5. Степень точки относительно окружности. Радикальная ось двух окружностей

Ниже существенную роль будет играть понятие степени точки относительно окружности, которое является аналогом понятия расстояния от точки до прямой.

Степенью точки M относительно окружности K называется число

$$s = d^2 - r^2,$$

где d — расстояние точки M от центра O окружности K, а r — радиус этой окружности. Если точка M лежит внутри окружности K, то $d<r$, и потому степень точки M: $s=d^2-r^2$ отрицательна. Величины $r-d$ и $r+d$ суть отрезки диаметра PQ, на которые его разбивает точка M. Поэтому для любой хорды AMB круга K (рис. 28, *а*) имеем

$$s = -AM \cdot MB.$$

Если точка M лежит на окружности K, то $d=r$ и, следовательно, степень точки M равна нулю. Наконец, если точ-

ка M лежит вне окружности K, то $d>r$ и $s=d^2-r^2$ представляет собой квадрат длины касательной к окружности K, проведенной из точки M (рис. 28, *б*).

Пусть теперь даны две окружности K_1 и K_2. Геометрическое место точек, степени которых относительно окружностей K_1 и K_2 равны, называют *радикальной осью* окружностей K_1 и K_2.

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Если окружности K_1 и K_2 не концентрические, то их радикальная ось представляет собой прямую, перпендикулярную линии центров K_1 и K_2.*

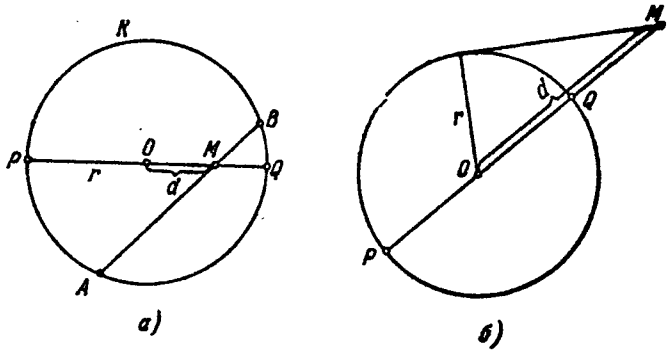

Рис. 28.

Доказательство. Пусть O_1 и r_1, O_2 и r_2— соответственно центры и радиусы окружностей K_1 и K_2. Пусть, далее, точка M удалена от точки O_1 на расстояние d_1, а от точки O_2— на расстояние d_2. Если степени точки M относительно окружностей K_1 и K_2 равны, т. е.

$$s_1=s_2,$$

то

$$d_1^2-r_1^2=d_2^2-r_2^2.$$

Отсюда

$$d_1^2-d_2^2=r_1^2-r_2^2=\text{const},$$

так как r_1 и r_2— постоянные числа. Таким образом, геометрическое место точек, имеющих равные степени относительно окружностей K_1 и K_2, совпадает с геометрическим

местом точек, разность квадратов расстояний которых соответственно от точек O_1 и O_2 равна некоторому данному числу:

$$k = r_1^2 - r_2^2.$$

Не нарушая общности, можно считать, что $k \geqslant 0$, в противном случае, поменяв ролями окружности K_1 и K_2, придем к случаю $k \geqslant 0$. Пусть S — точка линии центров O_1O_2 такая, что

$$O_1S^2 - O_2S^2 = k.$$

Так как

$$O_1S \geqslant O_2S$$

(нам дано, что $k \geqslant 0$), то точка S может лежать либо внутри отрезка O_1O_2, либо вне его правее точки O_2 (рис. 29).

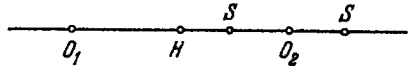

Рис. 29.

В первом случае $O_1S + O_2S = O_1O_2$, а во втором $O_1S - O_2S = O_1O_2$. Таким образом, если S лежит внутри отрезка O_1O_2, то k удовлетворяет неравенству

$$k = (O_1S - O_2S)(O_1S + O_2S) < (O_1O_2)^2.$$

Если же S лежит вне отрезка O_1O_2, то

$$k = (O_1S - O_2S)(O_1S + O_2S) > (O_1O_2)^2.$$

Если S совпадает с точкой O_2, то

$$k = (O_1O_2)^2$$

и, наконец, если S совпадает с серединой отрезка O_1O_2, то $k = 0$. Легко видеть, что точка S может быть расположена на прямой O_1O_2 лишь правее середины H отрезка O_1O_2 или в крайнем случае совпадать с этой точкой, так как в противном случае число k будет отрицательным.

Если $k > (O_1O_2)^2$, то из соотношения

$$O_1S + O_2S = \frac{k}{O_1O_2}$$

вытекает, что правее точки O_2 вне отрезка O_1O_2 есть одна и только одна точка S такая, что

$$O_1S^2 - O_2S^2 = k.$$

Аналогичное заключение имеет место и в случае, когда $0 \leqslant k \leqslant (O_1O_2)^2$. В этом случае точка S расположена на отрезке HO_2. Итак, на линии центров O_1O_2 есть единственная точка S такая, что

$$O_1S^2 - O_2S^2 = k,$$

где $k = r_1^2 - r_2^2 \geqslant 0$.

Пусть теперь X — произвольная точка плоскости такая, что $O_1X^2 - O_2X^2 = k$ и Y — проекция X на прямую O_1O_2. По теореме Пифагора имеем (рис. 30)

$$O_1X^2 - O_1Y^2 = XY^2,$$
$$O_2X^2 - O_2Y^2 = XY^2.$$

Отсюда

$$O_1X^2 - O_1Y^2 = O_2X^2 - O_2Y^2.$$

Поэтому

$$O_1Y^2 - O_2Y^2 = O_1X^2 - O_2X^2 = r_1^2 - r_2^2 = k. \qquad (*)$$

Так как точка Y лежит на прямой O_1O_2 и для нее выполнено соотношение (*), то она необходимо совпадает с точкой S. Таким образом, точка X лежит на перпендикуляре l к линии центров O_1O_2. Далее для всех точек Z прямой l выполнено соотношение

$$O_1Z^2 - O_2Z^2 = k.$$

Это вытекает из того, что

$$O_1Z^2 - O_2Z^2 = O_1Y^2 - O_2Y^2 = k.$$

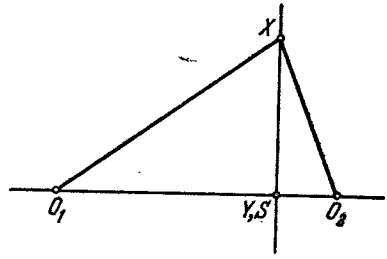

Рис. 30.

Таким образом, искомое геометрическое место точек есть прямая, перпендикулярная линии центров.

Теорема доказана.

Рассмотрим вопрос о построении радикальной оси двух неконцентрических окружностей. Как мы условились выше (см. доказательство теоремы 1), окружность с бо́льшим радиусом обозначаем через K_1. Поэтому если K_1 и K_2 — данные окружности, а r_1 и r_2 — их радиусы, то

$$k = r_1^2 - r_2^2 \geqslant 0.$$

Если O_1 и O_2— центры K_1 и K_2, а H — середина O_1O_2, то радикальная ось окружностей K_1 и K_2 пересекает прямую O_1O_2 в точке S, которая расположена по ту же сторону от H, что и точка O_2. Построение радикальной оси сводится, таким образом, к построению точки S на прямой O_1O_2 и затем к восстановлению перпендикуляра l к этой прямой в точке S.

Рассмотрим теперь свойства радикальной оси l в зависимости от характера взаимного расположения окружностей K_1 и K_2:

1. K_1 и K_2 пересекаются в двух точках A и B (рис. 31). Так как степени точек A и B относительно обеих окружностей K_1 и K_2 равны нулю, то радикальная ось l совпадает

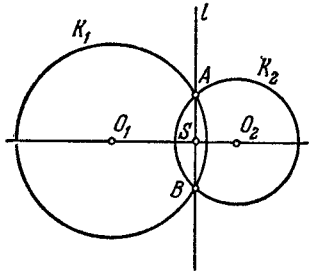

Рис. 31.

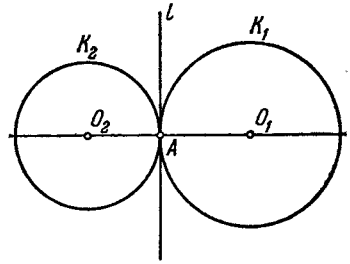

Рис. 32.

с прямой AB. В этом случае радикальная ось пересекает линию центров во внутренней точке отрезка O_1O_2.

2. K_1 и K_2 имеют единственную общую точку A, в которой они касаются друг друга (рис. 32). Степень точки A относительно обеих окружностей K_1 и K_2 равна нулю. Поэтому радикальная ось l проходит через точку A, и поскольку l перпендикулярна линии центров O_1O_2, она совпадает с общей касательной к K_1 и K_2 в точке A. В этом случае радикальная ось пересекает отрезок O_1O_2 также во внутренней точке и окружности K_1 и K_2, кроме того, лежат по разные стороны от l.

3. Окружности K_1 и K_2 не имеют общих точек. Здесь мы будем особо рассматривать два подслучая:

а) Окружности K_1 и K_2 расположены одна вне другой (рис. 33). Проведем к K_1 и K_2 какие-нибудь две общие касательные PQ и RT и пусть H_1 и H_2— середины отрезков PQ и RT. Так как степень точки X, лежащей вне окруж-

ности K_1, относительно этой окружности равна квадрату длины касательной, проведенной из точки X, то точки H_1 и H_2 имеют равные степени относительно обеих окружностей K_1, K_2 и, следовательно, принадлежат радикальной оси l. Поэтому радикальная ось l окружностей K_1 и K_2 совпадает с прямой H_1H_2. Легко видеть, что K_1 и K_2 лежат по разные стороны от радикальной оси l и l пересекает линию центров во внутренней точке отрезка O_1O_2.

б) Окружность K_2 лежит внутри окружности K_1. В этом случае построение осуществляется по общему способу: находится точка пересечения S радикальной оси l

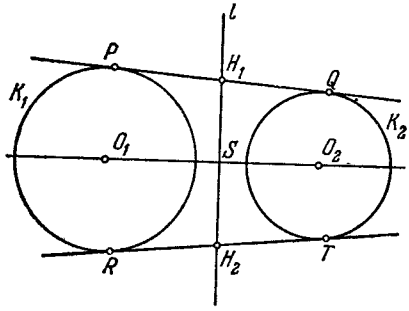

Рис. 33.

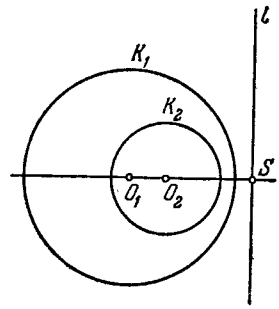

Рис. 34.

с линией центров O_1O_2 и из нее восстанавливается перпендикуляр к линии центров. В рассматриваемом случае (рис. 34) $r_1 - r_2 \geqslant O_1O_2$ и потому

$$k = r_1^2 - r_2^2 = (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) > (O_1O_2)^2.$$

Следовательно, радикальная ось l расположена вне окружности K_1 и обе окружности K_1 и K_2 лежат по одну сторону от l.

Из проведенных рассмотрений ясно, что построение радикальной оси значительно облегчается в случаях 1, 2, 3а.

В заключение заметим, что геометрическим местом точек, касательные из которых к K_1 и K_2 равны, является в случаях 2 и 3 вся радикальная ось, а в случае 1 все точки радикальной оси, кроме точек отрезка AB (A и B — точки пересечения окружностей K_1 и K_2).

§ 6. Приложение инверсии к решению задач на построение

С помощью преобразования инверсии можно дать весьма простые и изящные решения ряда задач на построение. Ниже мы рассматриваем задачи, в которых требуется построить окружность, касающуюся или ортогональную соответственно одной или нескольким окружностям.

1. Задачи на касание окружностей. Задача 1. Три окружности K_1, K_2, K_3 пересекаются в одной точке O. Требуется построить все окружности, касающиеся окружностей K_1, K_2, K_3. Нетрудно видеть (рис. 35), что задача имеет четыре решения (на рис. 35 они изображены пунктиром).

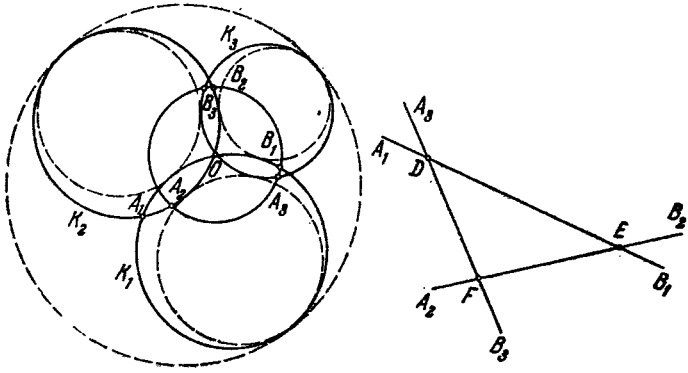

Рис. 35.

Метод инверсии легко позволяет найти эти решения. Действительно, пусть φ — инверсия с центром в точке O и радиусом r таким, что окружность инверсии пересекает окружности K_1, K_2, K_3 соответственно в точках A_1, B_1; A_2, B_2; A_3, B_3. Инверсия φ переводнт окружности K_1, K_2, K_3 соответственно в прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, причем, так как по условию задачи окружности K_1, K_2, K_3 пересекались попарно в точке O (а не касались), то прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 попарно пересекаются. Таким образом, наша задача сводится к построению всех окружностей, касающихся прямых A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3. Это, очевидно, будут вписанная и три вневписанные окружности треугольника DEF, образованными этими прямыми. Построение этих окружностей не вызывает затруднений, а тогда по правилу,

изложенному в § 4, строим образы четырех окружностей, касающихся сторон треугольника DEF или их продолжений, относительно инверсии φ. Полученные окружности и есть искомые.

Заметим, что все проведенные построения можно выполнить с помощью циркуля и линейки.

З а д а ч а 2. Построить окружности, которые касались бы двух данных окружностей K_1 и K_2 и проходили бы через данную точку O, лежащую вне K_1 и K_2.

Пусть R — одна из искомых окружностей. Обозначим через φ инверсию с центром в точке O. Тогда φ переводит K_1 и K_2 соответственно в окружности K'_1 и K'_2, а окружность R — в их общую касательную R'. Отсюда видно, что

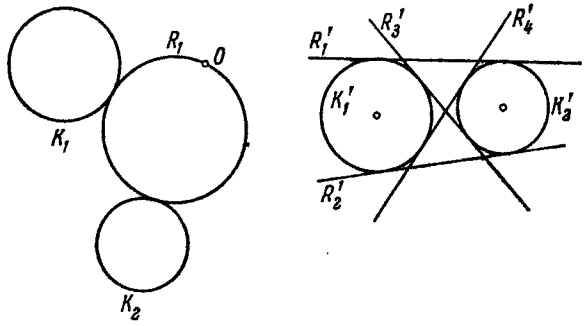

Рис. 36.

решения задачи представляют собой окружности, которые будут образами общих касательных к окружностям K_1 и K'_2 относительно инверсии φ. Так как таких касательных четыре, то задача имеет четыре решения (рис. 36).

З а д а ч а 3 (Задача Аполлония). Построить окружности, касающиеся трех данных окружностей K_1, K_2 и K_3.

Мы изложим здесь два решения этой задачи.

П е р в о е р е ш е н и е. Пусть L — одна из искомых окружностей (рис. 37). Соединим отрезком O_1O_3 центры окружностей K_1 и K_3 и проведем соответственно из точек O_1, O_2, O_3 окружности радиусов r_1+s, r_2+s, r_3+s, где

$$s=\frac{O_1O_3-r_1-r_3}{2}.$$

Обозначим построенные окружности соответственно через $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, $\overline{K}_3$. Пусть $\overline{L}$ — окружность, концентрическая по

отношении к окружности L и имеющая радиус $\overline{R}=R-s$. Очевидно, $\overline{L}$ касается окружностей $\overline{K}_1$, $\overline{K}_2$, $\overline{K}_3$. Поэтому ясно, что если мы построим окружность $\overline{L}$, то мы без труда построим и окружность L. Окружности $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$ построены так, что они касаются друг друга в некоторой точке D. Обозначим через φ инверсию с центром в точке D и радиусом r таким, что окружность инверсии пересекает окружности $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_3$. Инверсия φ переводит окружности $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_3$ в пару параллельных прямых l_1 и l_3, а окружность $\overline{K}_2$ в некоторую окружность $\overline{K}'_2$. Окружность $\overline{L}$ инверсией φ переводится в окружность $\overline{L}'$, которая касается $\overline{K}'_2$ и обеих параллельных прямых l_1 и l_3. Таким образом, решение задачи Аполлония сводится к весьма простой задаче на построение: провести окружности, касающиеся пары параллельных прямых и данной окружности.

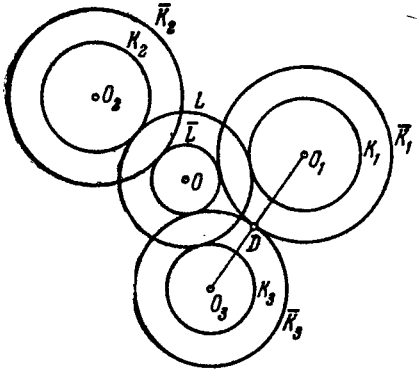

Рис. 37.

Мы предоставляем читателю самому решить эту задачу и, кроме того, предлагаем самостоятельно провести исследование в задаче Аполлония, учтя при этом, что проведенное построение можно применить к парам окружностей K_1 и K_2, K_2 и K_3.

Второе решение. Сделаем вспомогательное построение, которое сведет задачу Аполлония к задаче 2. Пусть окружность K_3 имеет радиус r_3 такой, что $r_1 \geqslant r_3$, $r_2 \geqslant r_3$. Пусть теперь L — одна из окружностей, касающаяся окружностей K_1, K_2, K_3. Проведем из точек O_1 и O_2 окружности $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$, радиусы которых равны соответственно $\rho_1=r_1-r_3$ и $\rho_2=r_2-r_3$ (рис. 38). Окружность $\overline{L}$, проведенная из точки O как из центра радиусом $\rho=R+r_3$, будет касаться $\overline{K}_1$ и $\overline{K}_2$ и проходить через точку O_3. Построение окружности $\overline{L}$ дано в решении задачи 2.

Поэтому, построив окружность $\overline{L}$, строим искомую окружность L как концентрическую ей с радиусом, уменьшенным на величину r_3. Вопрос об исследовании оставляем читателю в качестве упражнения.

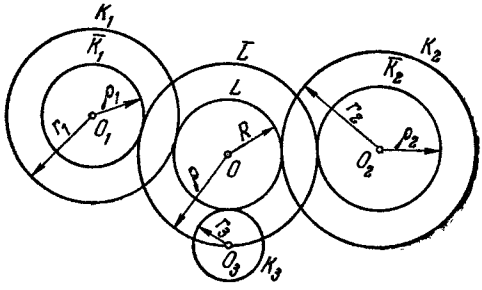

Рис. 38.

2. Построение окружностей, пересекающих данные окружности ортогонально. Мы будем говорить, что две кривые пересекаются в точке M *ортогонально* или что они *ортогональны* в точке M, если угол между касательными к этим кривым в точке M прямой.

З а д а ч а 4. Даны две неконцентрические окружности K_1 и K_2. Требуется построить все окружности, ортогональные K_1 и K_2 и проходящие через данную точку M.

Р е ш е н и е этой задачи разбивается на ряд случаев в зависимости от взаимного расположения окружностей K_1, K_2 и точки M.

а) Окружности K_1 и K_2 пересекаются в точках A и B (рис. 39, *а*). Очевидно, что если бы точка M совпадала с одной из точек A или B, то искомой окружностью k могла бы быть соответственно только точка A или точка B, которые рассматривались бы как окружности нулевого радиуса. Поэтому в дальнейшем рассматривается случай, когда точка M отлична от точек A и B.

Пусть φ — преобразование инверсии с центром в точке A и радиусом $r=AB$. Тогда φ переводит M в некоторую точку M', точку B оставляет неподвижной, а окружности K_1 и K_2 переводит в прямые K'_1 и K'_2, проходящие через точку B (рис. 39, *б*). Образ k' искомой окружности k при инверсии φ должен быть окружностью или прямой, которая ортогональна непараллельным прямым K'_1 и K'_2 и

проходит через точку M', отличную от точек A и B. Очевидно, что имеется лишь одна окружность, удовлетворяющая этим условиям (прямой k', удовлетворяющей сформулированным выше условиям, нет). Это окружность с центром в точке B и радиусом, равным длине отрезка BM'.

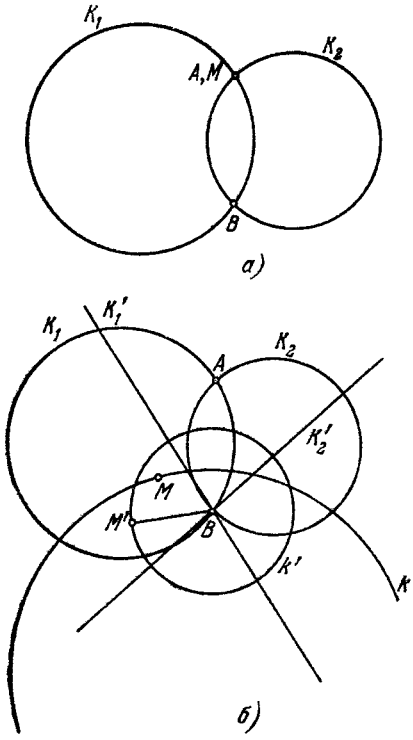

Рис. 39.

Обозначим эту окружность через k' (рис. 39,*б*). Так как дважды выполненная инверсия φ приводит к тождественному преобразованию, то образ k' при инверсии φ — окружность k — и есть искомая окружность. В процессе решения задачи было установлено, что задача имеет одно решение при любом положении точки M.

б) Окружности K_1 и K_2 имеют одну общую точку A, в которой они касаются друг друга.

Если точка M совпадает с точкой A, то задача имеет бесконечно много решений. Действительно, решением задачи будет, во-первых, прямая O_1O_2, являющаяся линией центров окружностей K_1 и K_2 (рис. 40) и, во-вторых, любая окружность с центром на прямой l, проходящая через точку A (l — общая касательная к K_1 и K_2 в точке A).

Пусть теперь M — любая точка плоскости, отличная от точки A. Обозначим через φ преобразование инверсии с центром в точке A и радиусом $r=AM$. Тогда инверсия φ переводит точку M в точку M', а окружности K_1 и K_2 переведет в параллельные прямые K_1' и K_2' (рис. 41). Образ k' искомой окружности k при инверсии φ должен быть окружностью или прямой, проходящей через точку M

и ортогональной двум параллельным прямым K'_1 и K'_2. Очевидно, что k' может быть только прямой (но не окружностью). Так как такая прямая проходит через фиксированную точку M' и перпендикулярна двум параллельным прямым K'_1 и K'_2, то прямая k' единственна. Инверсией φ прямая k' переводится в искомую окружность k.

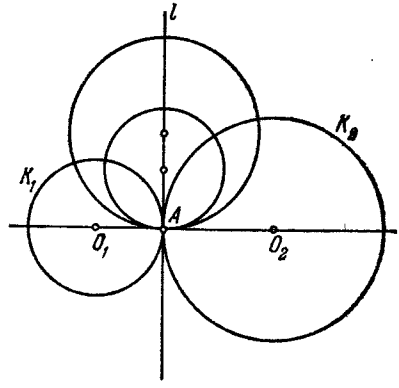

Рис. 40.

Итак, если точка M отлична от точки A, то задача имеет всегда одно решение.

в) Окружности K_1 и K_2 не имеют общих точек. Докажем прежде всего, что на линии центров O_1O_2 (рис. 42) можно найти точку A такую, что если A принять за центр некоторой инверсии φ, то φ переведет K_1 и K_2 в концентрические окружности.

Пусть l — радикальная ось окружностей K_1 и K_2. Обозначим через S точку пересечения l и линии центров O_1O_2. Как было выяснено в § 5, точка S лежит вне обеих окружностей K_1 и K_2, поскольку K_1 и K_2 не имеют общих точек. Проведем из S касательную к окружности K_1, и пусть T_1 — соответствующая точка касания. Окружность K с центром в точке S и радиусом $R = ST_1$ пересекает окружности K_1 и K_2 ортогонально. Для окружности K_1 это непосредственно вытекает из построения, а для окружности K_2 это следует из того, что длина касательной, проведенной из точки S к окружности K_2, равна длине

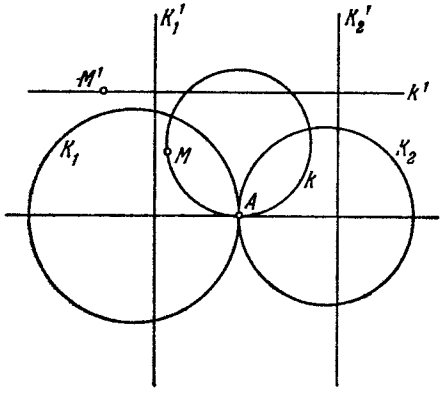

Рис. 41.

отрезка ST_1 или, что то же, радиусу окружности K. Обозначим через A и B точки пересечения окружности K с линией центров O_1O_2. Точки A и B, очевидно, не лежат ии на одной из окружностей K_1 и K_2.

Преобразование инверсии φ определим следующим образом. Центр φ поместим в точку A, а радиус возьмем равным длине отрезка AB : $r=AB$.

Инверсия φ оставляет неподвижной точку B, окружность K переводит в прямую K', проходящую через точку B и перпендикулярную линии центров O_1O_2, линию центров оставляет инвариантной, а окружности K_1 и K_2 переводит в окружности K'_1 и K'_2, центры которых лежат на прямой O_1O_2 (рис. 43). Так как прямая K' ортогональна обеим окружностям K'_1 и K'_2, то центры K_1' и K'_2 должны лежать на прямой K'. Отсюда следует, что центры окружностей K'_1 и K'_2 находятся в точке пересечения прямых K' и O_1O_2, т. е. K_1' и K_2' — концентрические окружности с центром в точке B.

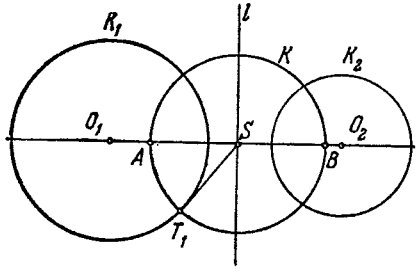

Рис. 42.

Допустим теперь, что точка M отлична от точек A и B. Тогда ее образ при инверсии φ — точка M' — также отлична от этих точек. Если k' — образ при инверсии φ одной из искомых окружностей k, то k' необходимо есть прямая, проходящая через точки B и M'. Отсюда следует, что прямая k' единственна. Производя над ней инверсию φ, получаем искомую окружность k. Итак, если точка M отлична от точек A и B, то задача имеет единственное решение. Если M совпадает с точкой B, то в качестве k' можно взять любую прямую, проходящую через точку B. Отсюда видно, что в этом случае задача имеет бесконечно много решений.

Если точка M совпадает с точкой A, то задача также имеет бесконечно много решений. Для этого достаточно провести изложенные выше построения с единственной заменой: рассмотреть инверсию φ_1 с центром в точке B и радиусом $r=AB$.

Таким образом, все возможные расположения точки M и окружностей K_1 и K_2 рассмотрены. Задача полностью решена.

Задача 5. Даны три окружности K_1, K_2, K_3, расположенные так, что одна лежит вне двух других. Построить окружность, ортогональную всем трем данным окружностям.

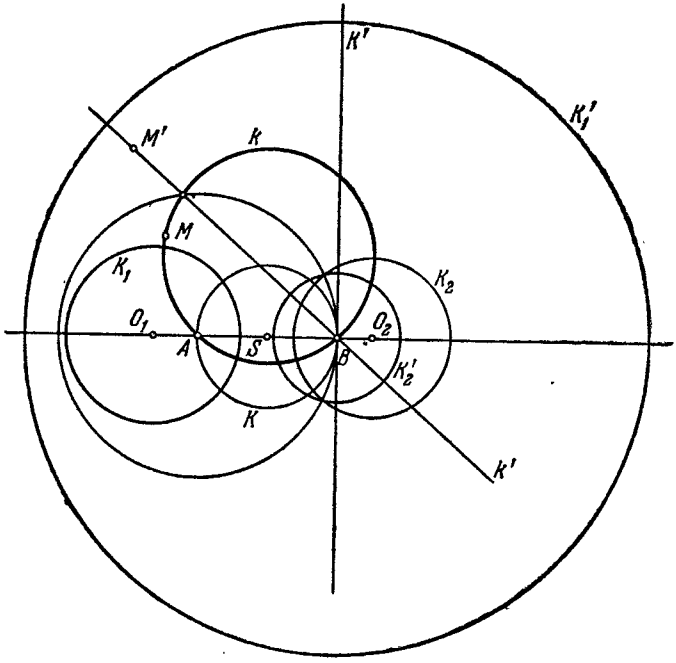

Рис. 43

Решение. По условию окружности K_1, K_2, K_3 расположены так, что радикальная ось любых двух из них разделяет соответствующие окружности. Поэтому окружности K_1 и K_2, K_2 и K_3 имеют радикальные оси l_1 и l_2, которые не совпадают.

Может представиться два случая:

а) Прямые l_1 и l_2 параллельны. Тогда центры окружностей K_1, K_2, K_3 лежат на одной прямой. Эта прямая и есть решение задачи.

б) Прямые l_1 и l_2 пересекаются в некоторой точке S. По условию окружности K_1, K_2, K_3 расположены так, что

их радикальные оси лежат вне соответствующих пар окружностей. Поэтому из точки S можно провести касательные ко всем окружностям K_1, K_2, K_3. Все касательные имеют равные длины. Пусть ST_1— касательная к окружности K_1 (T_1— точка касания с окружностью K_1) и r — длина этой касательной. Окружность с центром в точке S и радиусом r, очевидно, и будет искомой.

Из рассмотренн, проведенных выше, вытекает, что задача всегда имеет одно решение.

§ 7. Пучки окружностей

Фиксируем на плоскости две окружности K_1 и K_2. Совокупность всех окружностей, ортогональных K_1 и K_2, будем называть *пучком окружностей*. Мы будем также говорить, что этот пучок порождается окружностями K_1 и K_2, и обозначать его $P(K_1, K_2)$; часто, если порождающие

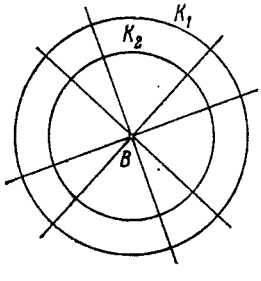

Рис. 44.

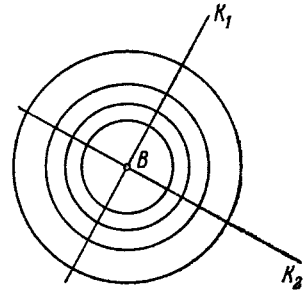

Рис. 45.

пучок окружности K_1 и K_2 не будут играть специальной роли, мы будем обозначать пучок кратко буквами P или Q. Так как выше мы условились считать прямую частным случаем окружности, то в состав пучков наряду с окружностями могут входить и прямые.

Рассмотрим сначала три пучка, устроенных наиболее просто. Эти пучки возникают при специальном выборе окружностей K_1 и K_2.

1. K_1 и K_2— концентрические окружности с общим центром в точке B. В рассматриваемом случае пучок $P(K_1,K_2)$, очевидно, представляет собой совокупность всех прямых, проходящих через точку B (рис. 44). Этот пучок назовем *простейшим эллиптическим пучком*.

2. K_1 и K_2 — прямые, пересекающиеся в точке B. Пучок $P(K_1, K_2)$, очевидно, представляет собой совокупность всех концентрических окружностей с общим центром в точке B (рис. 45). Пучок $P(K_1, K_2)$ назовем *простейшим гиперболическим пучком*.

3. K_1 и K_2 — параллельные прямые. Пучок $P(K_1, K_2)$ в этом случае состоит, очевидно, из всех прямых, перпендикулярных прямым K_1 и K_2 (рис. 46). Этот пучок назовем *простейшим параболическим пучком*.

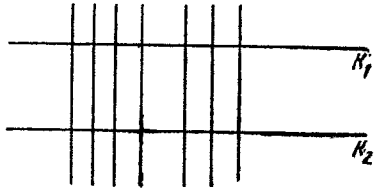

Рис. 46.

Рассмотрим, чем отличаются друг от друга простейшие пучки. Для этого обратим внимание на количество общих точек у окружностей K_1 и K_2, порождающих тот или другой пучок. Имеем:

Тип пучка	Количество общих точек у окружностей K_1 и K_2
Эллиптический	0
Параболический	1 (бесконечно удаленная точка O_∞)
Гиперболический	2 (точка B и O_∞)

Так как более двух общих точек окружности (в том числе и прямые) иметь не могут, то ясно, что имеются лишь три различных вида простейших пучков.

Оказывается, что для произвольно взятых окружностей K_1 и K_2 порождаемый ими пучок $P(K_1, K_2)$ с помощью надлежаще выбранной инверсии может быть преобразован в один из трех простейших пучков. Так как инверсия — взаимно однозначное преобразование, то любой пучок P может быть преобразован инверсией в простейший пучок только одного определенного типа. Так, например, если инверсия φ переводит пучок $P(K_1, K_2)$ в простейший эллиптический пучок P', то никакая другая инверсия φ_1 не может перевести его в параболический или гиперболический пучок P_1. Действительно, если φ_1 переводит $P(K_1, K_2)$ в P_1, то на

основании теоремы 1 § 3 та же инверсия φ_1 переводит P_1 в $P(K_1, K_2)$. Положим

$$K'_1 = \varphi(K_1), \quad \tilde{K}_1 = \varphi_1(K_1),$$
$$K'_2 = \varphi(K_2), \quad \tilde{K}_2 = \varphi_1(K_2).$$

Тогда

$$K_1 = \varphi_1(\tilde{K}_1), \quad K_2 = \varphi_1(\tilde{K}_2).$$

Очевидно, K'_1 и K'_2— концентрические окружности, а $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}_2$— пересекающиеся или параллельные прямые. Обозначим через f преобразование плоскости, которое состоит в последовательном выполнении двух инверсий φ_1 и φ. Прямые $\tilde{K}_1$ и $\tilde{K}_2$, которые имеют по крайней мере одну общую точку O_∞, преобразованием f переводятся в окружности K'_1, K'_2, которые не имеют общих точек, что невозможно, так как фигуры $f(\tilde{K}_1)$ и $f(\tilde{K}_2)$ должны иметь хотя бы одну общую точку.

Имеет место следующая основная теорема.

Т е о р е м а 1. 1. *Если K_1 и K_2 не имеют общих точек, то существует инверсия φ_1, переводящая $P(K_1, K_2)$ в простейший эллиптический пучок.*

2. *Если K_1 и K_2 имеют единственную общую точку, то существует инверсия φ_2, переводящая $P(K_1, K_2)$ в простейший параболический пучок.*

3. *Если K_1 и K_2 имеют две общие точки, то существует инверсия φ_3, переводящая $P(K_1, K_2)$ в простейший гиперболический пучок.*

Доказательство теоремы 1 тесно связано с построениями, проведенными в § 6 при решении задачи 4. Дальнейшие построения будут опираться также на следующую лемму.

Л е м м а 1. *Пусть произвольная инверсия φ переводит любые две окружности K_1 и K_2 в окружности K'_1 и K'_2. Тогда образ пучка $P(K_1, K_2)$ относительно φ есть пучок $P(K_1', K'_2)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о л е м м ы. Так как ортогональность окружностей при любой инверсии сохраняется, то образ $P(K_1, K_2)$ относительно φ есть совокупность окружностей, входящих в пучок $P(K'_1, K'_2)$. Для того чтобы доказать совпадение образа $P(K_1, K_2)$ с пучком $P(K'_1, K'_2)$, достаточно установить, что для любой окружности k' пучка $P(K'_1, K'_2)$ найдется окружность k пучка $P(K_1, K_2)$ такая, что $\varphi(k) = k'$.

Положим

$$k = \varphi(k').$$

Тогда k ортогональна K_1 и K_2 и, стало быть, принадлежит пучку $P(K_1, K_2)$. Так как дважды последовательно выполненная инверсия есть тождественное преобразование, то

$$\varphi(k) = \varphi(\varphi(k')) = k'.$$

Лемма доказана.

а) Доказательство утверждения 1. Пусть K_1 и K_2 — две произвольные окружности, не имеющие общих точек. Интерес представляет случай, когда K_1 и K_2 — не концентрические окружности. Одна из окружностей K_1 и K_2 может быть прямой (но не обе, ибо тогда K_1 и K_2 имеют по крайней мере одну общую точку — именно, бесконечно удаленную точку O_∞).

Итак, пусть K_1 и K_2 (рис. 47) — две неконцентрические окружности.

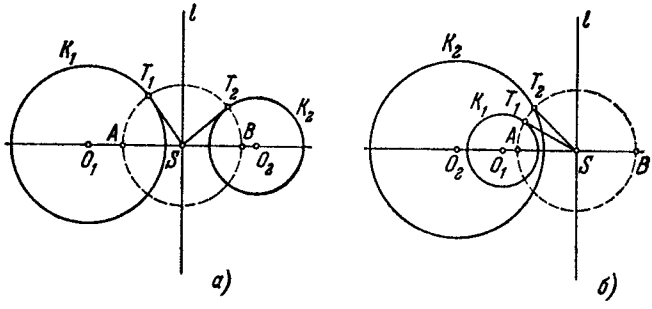

Рис. 47.

Пусть S — точка пересечения линии центров O_1O_2 с радикальной осью l окружностей K_1 и K_2 (построение точки S и оси l описано в § 5). Прямая l, а следовательно, и точка S лежат вне обеих окружностей K_1 и K_2, и потому из S можно провести касательные ST_1 и ST_2 к окружностям K_1 и K_2 (T_1 и T_2 — соответствующие точки касания). Так как точка S лежит на радикальной оси K_1 и K_2, то $ST_1 = ST_2$. Окружность K, описанная из центра S радиусом $a = ST_1$, пересекает ортогонально K_1 и K_2. Обозначим через A и B точки пересечения K с линией центров O_1O_2.

Инверсию φ_1 определим следующим образом: центр ее находится в точке A, а радиус равен длине отрезка AB. В задаче 4 § 6 доказано, что инверсия φ_1 переводит окружности K_1 и K_2 в концентрические окружности K_1' и K_2' с общим центром в точке B. Пучок окружностей $P(K_1, K_2)$ инверсия φ_1 переводит в пучок $P(K_1', K_2')$, который состоит из всех прямых, проходящих через точку B.

Таким образом, инверсия φ_1 переводит пучок $P(K_1, K_2)$ в простейший эллиптический пучок.

Осталось рассмотреть случай, когда одна из окружностей, например K_1,— прямая (рис. 48). Очевидно, K_1 лежит вне K_2. Проведем через точку O_2 прямую m, перпендикулярную K_1, и пусть S — точка пересечения прямых m и K_1. Пусть, далее, ST_2 — касательная к K_2. Обозначим через K окружность с центром в точке S и радиусом $a = ST_2$, а через A и B — точки пересечения K с прямой m. Инверсия φ_1, имеющая центр в точке A и радиус $r = AB$, оставляет неподвижной точку B, инвариантной прямую m и переводит окружность K в прямую K', которая проходит через точку B и ортогональна прямой m.

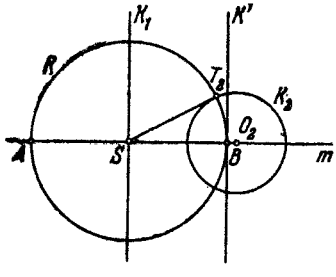

Рис. 48.

Прямая K_1 не проходит через точку A, а окружность K ортогональна прямой K_1 и окружности K_2. Поэтому образами K_1 и K_2 относительно φ_1 будут окружности K_1' и K_2', центры которых лежат одновременно на прямых K' и m, т. е. K_1' и K_2' — концентрические окружности с общим центром в точке B. Отсюда и вытекает, что образ пучка $P(K_1, K_2)$ есть простейший эллиптический пучок $P(K_1', K_2')$.

Утверждение 1 полностью доказано.

Доказательство утверждения 2. Пусть K_1 и K_2 — две окружности, имеющие одну общую точку A (рис. 49). (Одна из них, например K_1 (рис. 49,*в*), может быть прямой; случай, когда и K_1 и K_2 — прямые, неинтересен, так как тогда K_1 и K_2 параллельны и $P(K_1, K_2)$ — простейший параболический пучок.)

Если φ_2— инверсия с центром в точке A, то K_1 и K_2 переводятся φ_2 в параллельные прямые K_1' и K_2'. Применяя лемму 1, получаем, что $P(K_1', K_2')$ — простейшнй параболнческий пучок.

Утвержденне 2 доказано.

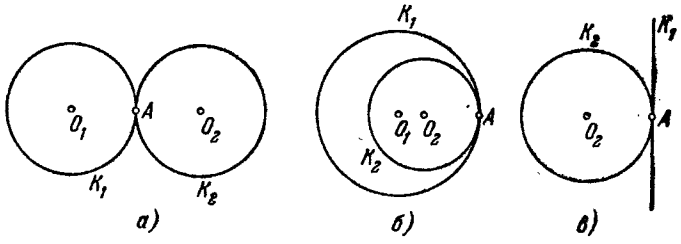

Рис. 49.

Доказательство утверждения 3. Пусть K_1 и K_2— окружности, имеющие две общие точки (рис. 50). Случай, когда и K_1 и K_2— прямые, неинтересен, так как тогда одна из их общих точек A или B бесконечно удаленная и $P(K_1, K_2)$ — простейший гиперболический пучок.

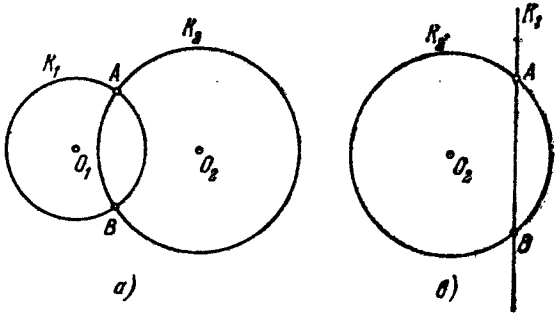

Рис. 50.

Пусть φ_3— инверсия с центром в точке A и радиусом $r=AB$. Тогда образами K_1 и K_2 относительно φ_3 будут прямые K_1' и K_2', пересекающиеся в точке B (рис. 51). Отсюда следует, что $P(K_1', K_2')$ — простейший гиперболический пучок.

Утверждение 3 доказано, и тем самым завершено доказательство теоремы 1.

Введем следующие определения.

Пучок $P(K_1, K_2)$, порождаемый окружностями K_1 и K_2, называется *эллиптическим*, если окружности K_1 и K_2 не имеют общих точек.

Пучок $P(K_1, K_2)$ называется *параболическим*, если окружности K_1 и K_2 имеют одну общую точку.

Пучок $P(K_1, K_2)$ называется *гиперболическим*, если окружности K_1 и K_2 имеют две общие точки.

Теорема 2. *Всякий эллиптический пучок может быть получен из некоторого простейшего эллиптического пучка с помощью надлежаще подобранной инверсии.*

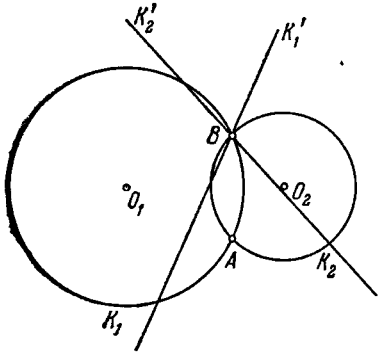

Рис. 51.

Теорема 3. *Всякий параболический пучок может быть получен из некоторого простейшего параболического пучка с помощью надлежаще подобранной инверсии.*

Теорема 4. *Всякий гиперболический пучок может быть получен из некоторого простейшего гиперболического пучка с помощью надлежаще подобранной инверсии.*

Отметим прежде всего, что в теоремах 2, 3, 4 предполагается, что рассматриваемые пучки не являются простейшими. Доказательства теорем 2, 3, 4 непосредственно вытекают из теоремы 1 и того факта, что применение дважды одной и той же инверсии сводится к тождественному преобразованию плоскости.

Точку A будем называть *узловой* для пучка P, если все окружности этого пучка проходят через точку A. Точку A будем называть *нулевой* для пучка P, если существует последовательность окружностей пучка P, стягивающаяся в точку A. (Более наглядно было бы пользоваться термином нулевая окружность, однако в последующем изложении он оказывается менее удобным.)

Из строения простейшего эллиптического пучка и теоремы 2 получаем, что всякий эллиптический пучок имеет

две узловые точки и ни одной нулевой. С другой стороны, всякий гиперболический пучок имеет две нулевые точки и не имеет ни одной узловой точки.

Пусть P — не простейший параболический пучок. Этот пучок получается некоторой инверсией φ из пучка P' всех параллельных между собой прямых. Пусть A — центр инверсии φ. Тогда нетрудно видеть, что P есть совокупность всех касающихся между собой окружностей в точке A, причем к этой совокупности присоединена также общая касательная ко всем окружностям в точке A (рис. 52). Поэтому у пучка P есть одна узловая и одна нулевая точка. Именно, точка A выступает здесь одновременно в двух ролях. Действуя на пучок P инверсией φ, получаем простейший параболический пучок P'. Естественно считать бесконечно удаленную точку одновременно и узловой и нулевой точкой простейшего параболического пучка P'.

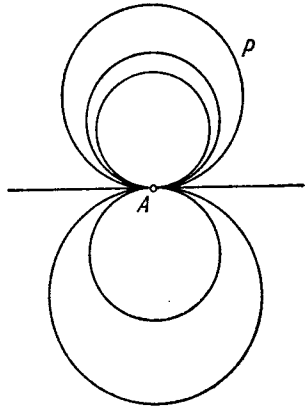

Рис. 52.

Из проведенных рассмотрений вытекает

Теорема 5. *Общее число узловых и нулевых точек любого пучка равно двум.*

Пучок окружностей P будем называть *ортогональным* пучку Q, если любая окружность пучка P ортогональна любой окружности пучка Q. Очевидно, что если пучок P ортогонален пучку Q, то и, обратно, пучок Q ортогонален пучку P.

Рассмотрим сначала ортогональные пары простейших пучков. Если P — простейший эллиптический пучок, т. е. совокупность всех прямых, проходящих через некоторую точку B, то, очевидно, совокупность всех окружностей, ортогональных окружностям пучка P, представляет собой простейший гиперболический пучок Q, состоящий из всех концентрических окружностей с центром в точке B (к Q мы присоединяем также точку B и бесконечно удаленную точку O_∞, которые суть нулевые точки Q). Легко видеть, что и, обратно, пучок Q является ортогональным

пучку P; при этом узловые точки P являются нулевыми точками пучка Q.

Если P — простейший параболический пучок, т. е. совокупность параллельных прямых вместе с бесконечно удаленной точкой O_∞, то ортогональным ему будет пучок Q, полученный из P поворотом на прямой угол, и наоборот. При этом узловые и нулевые точки пучков P и Q совпадают.

Из проведенных выше рассмотрений и теорем 2, 3, 4 получаем следующую теорему.

Теорема 6. *Для всякого пучка P есть только один ортогональный пучок Q. Если P — эллиптический пучок, то Q — гиперболический, и наоборот; при этом узловые точки P есть нулевые точки Q, и наоборот. Если же P — параболический пучок, то Q — также параболический пучок. Узловые и нулевые точки пучков P и Q в этом случае совпадают и находятся в одной и той же точке A. Пучок Q получается из пучка P поворотом пучка P вокруг точки A на прямой угол.*

§ 8. Строение эллиптического пучка

Теорема 1. *Всякий эллиптический пучок P, не являющийся простейшим, представляет собой совокупность всех окружностей, проходящих через некоторые две фиксированные точки.*

Доказательство. Так как P — эллиптический пучок, то существуют простейший эллиптический пучок P' и инверсия φ (см. теорему 2 § 7), переводящая пучок P' в пучок P.

P' представляет собой совокупность прямых, проходящих через некоторую точку B' (рис. 53). Обозначим через A центр инверсии φ. Точки A и B' различны; в противном случае инверсия φ переводила бы пучок P' сам на себя, а не в пучок P (напоминаем, что пучок P не простейший и, следовательно, отличен от P'). Так как образ пучка P' относительно инверсии φ есть совокупность окружностей, проходящих через точки A и $B=\varphi(B')$, то теорема доказана.

Следствие 1. *Точки A и B суть узловые точки пучка P.*

Поэтому всякий эллиптический пучок можно определить как совокупность окружностей, проходящих через две фиксированные точки (узловые точки пучка). Отсюда

следует, что узловые точки однозначно определяют эллиптический пучок.

Если одна из узловых точек пучка бесконечно удаленная, то эллиптический пучок превращается в простейший.

Следствие 2. *Пусть A и B — узловые точки пучка P. Тогда прямая AB является элементом пучка P.*

Если A и B — обыкновенные точки, то прямая AB является единственной прямой в пучке P (все его другие элементы суть окружности). Легко видеть, что прямая AB является радикальной осью для любой пары окружностей пучка P. Поэтому прямую AB называют *радикальной осью пучка P.*

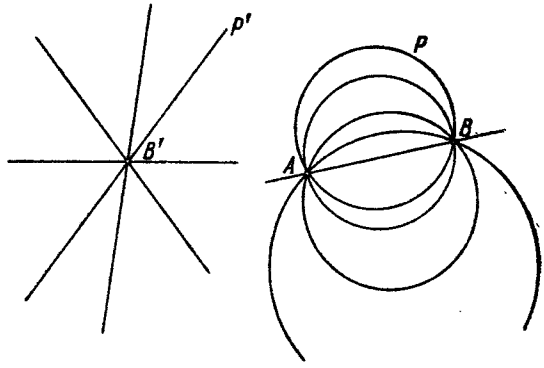

Рис. 53.

Таким образом, непростейший эллиптический пучок представляет собой совокупность всех «настоящих» окружностей, проходящих через две фиксированные точки, и общей радикальной оси всех пар окружностей, взятых из этой совокупности. Как мы отмечали, эта радикальная ось проходит через узловые точки эллиптического пучка.

Если же одна из точек A и B, например A, бесконечно удаленная, то пучок P состоит из всех прямых, проходящих через точку B. В этом случае особое положение прямой AB исчезает и, следовательно, для простейшего эллиптического пучка понятие радикальной оси теряет смысл. Таким образом, наличие в эллиптическом пучке единственной прямой является необходимым и достаточным условием отличия этого пучка от простейшего.

§ 9. Строение параболического пучка

Т е о р е м а 1. *Всякий непростейший параболический пучок P представляет собой совокупность всех окружностей, касающихся друг друга в некоторой фиксированной точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как P — непростейший параболический пучок, то существует простейший параболический пучок P' и инверсия φ (см. теорему 3 § 7) такие, что P есть образ пучка P' при инверсии φ. P' представляет собой совокупность всех прямых, параллельных между собой, к которым присоединена еще бесконечно удаленная точка. Обозначим через A центр инверсии φ, а через l — прямую из P', проходящую через точку A. Инверсия φ оставляет прямую l инвариантной, а все другие прямые пучка P' переводит в окружности, которые проходят через точку A (рис. 54) и касаются l в этой точке. Так как бесконечно удаленная точка O_∞ при инверсии φ имеет своим образом точку A, то отсюда следует, что пучок P и есть совокупность всех окружностей, касающихся друг друга в точке A, при этом точка A рассматривается как нулевая в пучке P.

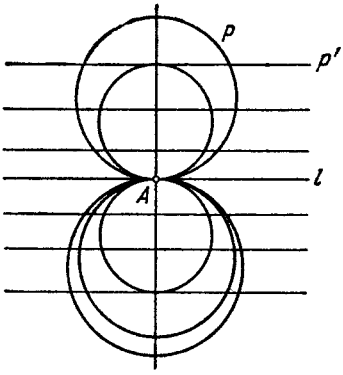

Рис. 54.

Теорема доказана.

С л е д с т в и е. *Прямая l, очевидно, есть элемент пучка P.*

Она является радикальной осью для любой пары окружностей пучка P. Поэтому прямую l называют *радикальной осью пучка P.*

Из теоремы 1 ясно, что всякий непростейший параболический пучок определяется заданием своей узловой (или, что то же, нулевой) точки A и радикальной оси l, проходящей через эту точку.

Если узловая точка параболического пучка бесконечно удаленная, то он превращается в простейший параболический пучок и выделение в нем радикальной оси теряет смысл.

Так же как и в случае эллиптических пучков, необходимым и достаточным условием отличия параболического пучка от простейшего является наличие в нем единственной прямой — радикальной оси пучка.

§ 10. Строение гиперболического пучка

Гиперболический пучок имеет более сложное строение, чем описанные в §§ 8 и 9 эллиптический и параболический пучки.

Пусть P — произвольный непростейший гиперболический пучок. Из теоремы 4 § 7 вытекает, что существуют простейший гиперболический пучок P' и инверсия φ такие, что исходный пучок P есть образ P' относительно инверсии φ. Пучок P' представляет собой совокупность концентрических окружностей с общим центром в некоторой точке B (рис. 55). Обозначим через A центр инверсии φ, а через r — ее радиус. Из доказательства теоремы 1 § 7 ясно, что, не нарушая общности, можно считать r равным длине отрезка AB.

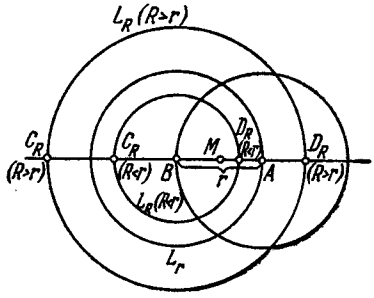

Рис. 55.

Обозначим через L_R окружность с центром в точке B, и пусть R — радиус этой окружности. Через C_R и D_R обозначим точки пересечения L_R с прямой AB, причем точку C_R (рис. 55) будем считать лежащей левее точки B, а точку D_R— правее той же точки. Через K_R (рис. 56) обозначим образ окружности L_R относительно инверсии φ. Пусть сначала

$$R < r,$$

тогда обе точки C_R и D_R лежат левее точки A. Их образы C'_R и D'_R, представляющие собой точки пересечения окружности K_R с прямой AB, также лежат левее точки A. Далее,

$$r + R = AC_R > r = AB > AD_R = r - R,$$

и потому

$$\frac{r}{2} < \frac{r^2}{r+R} = AC'_R < AB = r < \frac{r^2}{AD_R} = \frac{r^2}{r-R} = AD'_R.$$

Отсюда следует, что точка C'_R лежит внутри отрезка BM, где M — середина отрезка AB; точка D'_R лежит вне отрезка AB слева от точки B и, наконец, центр окружности K_R находится в точке Q_R, лежащей также левее точки B, поскольку

$$AQ_R = \frac{C'_R A + D'_R A}{2} = \frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{r+R} + \frac{1}{r-R}\right) = \frac{r^3}{r^2-R^2} > r.$$

Пусть теперь $R=r$. Тогда окружность L_r проходит через точку A (рис. 55), и так как

$$AC'_r = \frac{r^2}{BC_r} = \frac{r^2}{2r} = \frac{r}{2},$$

то инверсия φ переводит L_r в прямую K_r, проходящую через середину M отрезка AB перпендикулярно прямой AB (рис. 56).

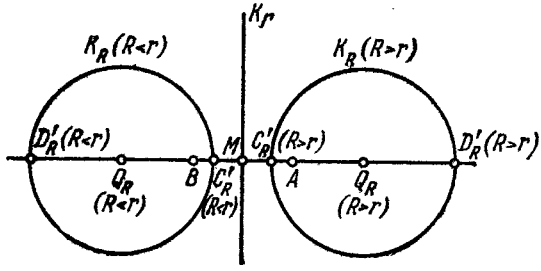

Рис. 56.

Если $R>r$, то точка C_R лежит левее точки B, а точка D_R правее точки A (рис. 55). Поскольку

$$AC'_R = \frac{r^2}{AC_R} = \frac{r^2}{r+R} < \frac{r}{2} = AM,$$

то точка C'_R лежит внутри отрезка AM, а точка D'_R вне отрезка AB правее точки A. Вся окружность K_R расположена правее прямой K_r (рис. 56), и ее центр — точка Q_R — лежит правее точки A, так как $AC'_R < AD'_R$. Действительно,

$$AC'_R = \frac{r^2}{r+R} < \frac{r^2}{R-r} = \frac{r^2}{AD_R} = AD'_R.$$

Обозначим через $h(R)$ радиус окружности K_R. При $R=0$ окружность K_R совпадает с точкой B и, следовательно, $h(0)=0$.

Если $R<r$, то

$$h(R)=\frac{D'_RA-C'_RA}{2}=\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{r-R}-\frac{1}{r+R}\right)=\frac{r^2R}{(r-R)(r+R)}. \quad (1)$$

Когда R стремится к r, из формулы (1) следует, что $h(R)$ неограниченно возрастает и стремится к $+\infty$. Этому соответствует простая наглядная картина: окружности K_R

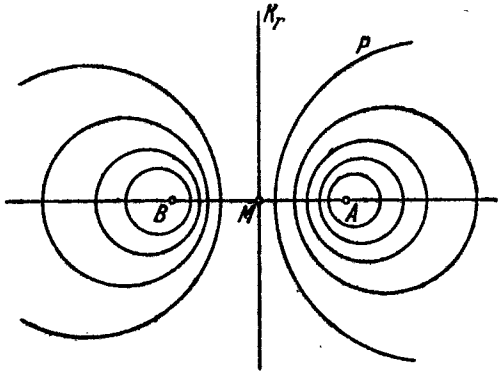

Рис. 57.

гиперболического пучка P при возрастании параметра R от 0 до r неограниченно расширяются и при $R=r$ переходят в прямую K_r.

Если $R>r$, то

$$h(R)=\frac{C'_RA+D'_RA}{2}=\frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{r+R}+\frac{1}{R-r}\right)=\frac{r^2R}{(R-r)(R+r)}. \quad (2)$$

Отсюда следует, что если R стремится к r, оставаясь больше r, то окружности K_R неограниченно расширяются и при $R=r$ переходят в прямую K_r. Если R монотонно возрастает от r до $+\infty$, то из формулы (2) следует, что окружность K_R сжимается и при $R\to+\infty$ ее радиус стремится к нулю. При $R=+\infty$ окружность K_R переходит в точку A.

Общий вид гиперболического пучка P изображен на рис. 57. Отметим, что прямая K_r есть радикальная

ось любой пары окружностей пучка P. (Этот факт мы предлагаем доказать читателю.) Прямая K_r называется *радикальной осью пучка* P.

Из проведенных рассуждений ясно, что гиперболический пучок полностью определяется заданием своих нулевых точек или одной нулевой точки и радикальной оси.

Если одна из нулевых точек бесконечно удаленная, то пучок P превращается в простейший гиперболический пучок, состоящий из совокупности концентрических окружностей. Для такого пучка понятие радикальной оси лишено смысла.

Так как в простейшем гиперболическом пучке нет ни одной прямой, то необходимым и достаточным условием отличия гиперболического пучка от простейшего является наличие в нем хотя бы одной прямой. Как мы знаем, в непростейшем гиперболическом пучке такая прямая единственна.

§ 11. Теорема Птоломея

В этом параграфе будет изучаться вопрос о том, когда через четыре точки плоскости возможно провести окружность. Оказывается, что на этот вопрос может быть дан ответ с помощью известной теоремы Птоломея из элементарной геометрии. Теорему Птоломея мы сформулируем и докажем несколько позже, а сейчас рассмотрим решение этого вопроса с помощью инверсии.

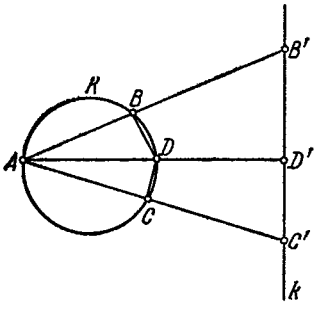

Рис. 58.

Пусть на плоскости даны три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Тогда через эти точки проходит единственная окружность K (рис. 58). Пусть, далее, φ — инверсия с центром в точке A и радиусом r. Величина r нам безразлична; для определенности мы будем считать, что r больше диаметра окружности K. Образом окружности K относительно инверсии φ будет прямая k, которая расположена целиком вне K, поскольку r больше диаметра K. Через B' и C', как обычно, обозначены образы точек B и C. Точки B' и C', очевидно, лежат на прямой k. Возьмем

теперь на плоскости произвольную точку D *), и пусть D' — ее образ. Если точка D лежит на окружности K, то точка D' принадлежит прямой k; если же D не лежит на K, то D' не принадлежит прямой k. Очевидно, что обратное также имеет место. Поэтому для того, чтобы четыре точки A, B, C, D лежали на окружности K, необходимо и достаточно, чтобы точки B', C', D' лежали на прямой k.

Если три точки B', C', D' лежат на одной прямой, то для отрезков $B'C'$, $C'D'$, $B'D'$ выполнено одно и только одно из трех соотношений:

$$\begin{aligned} B'D' + D'C' &= B'C', \\ B'C' + C'D' &= B'D', \\ C'B' + B'D' &= C'D'. \end{aligned} \qquad (*)$$

Если же три точки B', C', D' не лежат на одной прямой, то для тех же отрезков справедливо неравенство

$$B'D' + C'D' > B'C'. \qquad (**)$$

Постараемся теперь соотношения (*) и (**) записать так, чтобы в них не участвовали точки B', C', D'.

Предварительно установим следующую лемму.

Л е м м а 1. *Пусть на плоскости задана инверсия* φ *с центром в точке* O *и радиусом* r. *Пусть, далее,* M *и* N — *две произвольные точки плоскости, отличные от точки* O *и бесконечно удаленной точки* O_∞. *Тогда*

$$M'N' = MN\,\frac{r^2}{OM \cdot ON},$$

где

$$M' = \varphi(M), \quad N' = \varphi(N).$$

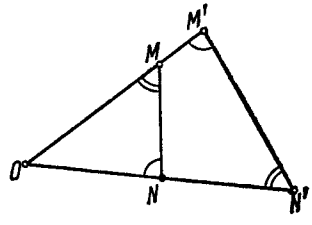

Рис. 59.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 1 § 4 треугольники OMN и $OM'N'$ (рис. 59) подобны и, кроме того,

$$\frac{M'N'}{MN} = \frac{OM'}{ON}.$$

Так как $OM' = \frac{r^2}{OM}$, то $M'N' = MN\,\frac{r^2}{OM \cdot ON}$.

Лемма доказана.

*) Мы предполагаем, что точка D отличиа от точек A, B, C.

Пользуясь только что доказанной леммой 1, имеем

$$B'D' = BD\frac{r^2}{AB\cdot AD}, \quad D'C' = DC\frac{r^2}{AD\cdot AC},$$
$$B'C' = BC\frac{r^2}{AB\cdot AC}.$$

Таким образом, если точки A, B, C, D лежат на окружности K, то их образы B', C', D' лежат на прямой k и справедливо соотношение

$$BD\frac{r^2}{AB\cdot AD} + DC\frac{r^2}{AD\cdot AC} = BC\frac{r^2}{AB\cdot AC}.$$

(мы предполагаем для определенности, что D' лежит между B' и C'); если же точки A, B, C, D не лежат на окружности K, то справедливо соотношение

$$BD\frac{r^2}{AB\cdot AD} + DC\frac{r^2}{AD\cdot AC} > BC\frac{r^2}{AB\cdot AC}.$$

Отсюда имеем, что

$$BD\cdot AC + DC\cdot AB = BC\cdot AD,$$

если точки A, B, C, D лежат на одной окружности, и

$$BD\cdot AC + DC\cdot AB > BC\cdot AD,$$

если точки A, B, C, D не лежат на одной окружности.

Итак справедлива

Теорема 1. *Для того чтобы четыре точки A, B, C, D лежали на одной окружности и при этом точки A и D лежали на разных дугах с концами B и C, необходимо и достаточно выполнение равенства*

$$BD\cdot AC + DC\cdot AB = BC\cdot AD.$$

Так как четырехугольник $ABDC$, вписанный в окружность K, удовлетворяет условиям теоремы 1, то мы получаем, что произведение диагоналей этого четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон. Так как окружность K и четырехугольник $ABDC$, вписанный в K, выбраны произвольно, то мы приходим к теореме.

Теорема 2 (Теорема Птоломея). *Во всяком вписанном четырехугольнике сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей.*

ГЛАВА II

КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ИНВЕРСИЯ

§ 12. Геометрическое изображение комплексных чисел и действий над ними

Как известно, каждое комплексное число $z=x+iy$, где i — так называемая «мнимая» единица ($i^2=-1$), удобно изображать точкой M плоскости с декартовыми координатами x, y. Мы предполагаем, что на плоскости фиксирована некоторая декартова система координат с началом в точке O (рис. 60). С каждой точкой плоскости M взаимно однозначно связан вектор $\boldsymbol{r}$ с началом в точке O и концом в точке M. Такой вектор принято называть *радиусом-вектором* точки M, а координаты точки M называются *координатами* или *компонентами* радиуса-вектора. Поэтому комплексное число $z=x+iy$ геометрически можно изображать также с помощью радиуса-вектора с координатами x, y.

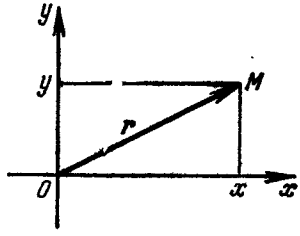

Рис. 60.

Если $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$ — два комплексных числа, а $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ — соответствующие им радиусы-векторы, то формулы для чисел z_1+z_2 и z_1-z_2 согласно определениям таковы:

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+i(y_1+y_2);\ z_1-z_2=(x_1-x_2)+i(y_1-y_2).$$

С другой стороны, из определения правил действия сложения и вычитания векторов (имеется в виду правило параллелограмма) вытекает, что векторы $\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2$ имеют координаты x_1+x_2, y_1+y_2 и x_1-x_2, y_1-y_2 соответственно. Поэтому сумме и разности комплексных чисел отвечают

радиусы-векторы, являющиеся соответственно суммой и разностью радиусов-векторов, изображающих данные комплексные числа (рис. 61).

Число $\bar{z}=x-iy$ называется числом, сопряженным $z=x+iy$. Пусть M — конец радиуса-вектора $\boldsymbol{r}$, соответствующего числу $z=x+iy$, а M_1 — конец радиуса-вектора

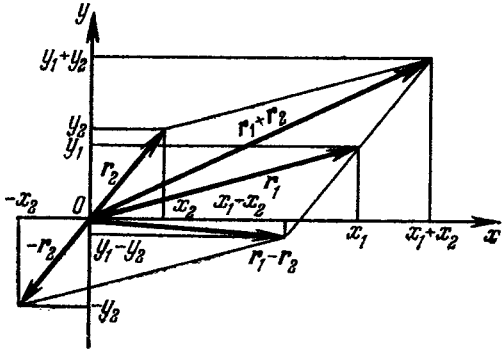

Рис. 61.

$\boldsymbol{r}_1$, соответствующего числу $\bar{z}=x-iy$. Так как точки M и M_1 имеют соответственно координаты x, y и x,—y, то M_1 получается из M отражением в оси x (рис. 62).

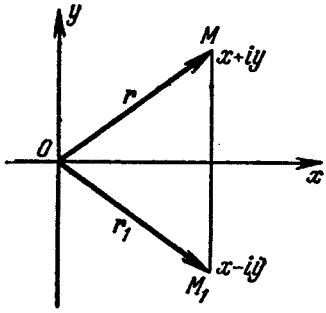

Рис. 62.

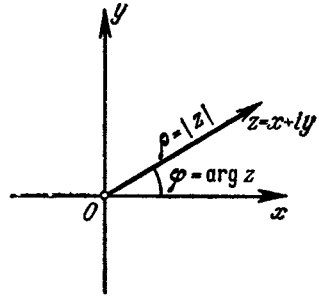

Рис. 63.

Пусть z — некоторое комплексное число и $\boldsymbol{r}$ — изображающий его радиус-вектор. Обозначим через $|z|$ длину вектора $\boldsymbol{r}$, а через φ угол, отсчитываемый от положительной части оси x до вектора $\boldsymbol{r}$ против часовой стрелки. Число $|z|$ называется модулем комплексного числа z, а угол φ —

его аргументом. Часто модуль z мы будем обозначать через ρ, а аргумент — через $\arg z$ (рис. 63). Очевидно, что для комплексного числа $z=x+iy$

$$x=\rho\cos\varphi,$$
$$y=\rho\sin\varphi.$$

Отсюда

$$z=x+iy=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Запись числа $z=x+iy$ в виде

$$z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

называется тригонометрической формой комплексного числа.

Наряду с положительными углами, отсчитываемыми от положительной части оси x до вектора против часовой стрелки, введем отрицательные углы, которые отсчитываются от положительной части оси x до вектора r по направлению часовой стрелки.

Если $\bar{z}$ — число, сопряженное числу

$$z=x+iy=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

то

$$\bar{z}=\rho(\cos\varphi-i\sin\varphi)=$$
$$=\rho(\cos(-\varphi)+i\sin(-\varphi))=$$
$$=\rho(\cos(2\pi-\varphi)+i\sin(2\pi-\varphi)).$$

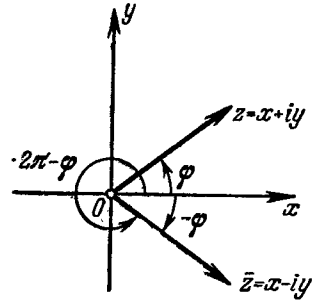

Рис. 64.

Поэтому в качестве аргумента числа $\bar{z}$ можно взять любой из углов — φ или $2\pi-\varphi$ (рис. 64).

Так как синус и косинус — периодические функции с периодом 2π, то значение аргумента комплексного числа z определяется с точностью до целого кратного 2π. Поэтому полезно выделить среди значений аргумента так называемое *главное значение*, которое заключено в пределах от нуля до 2π.

В дальнейшем, если не будет специальных оговорок, под аргументом комплексного числа z понимается любой угол φ такой, что $z=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi)$.

Перейдем к рассмотрению умножения комплексных чисел. Если даны два комплексных числа $z_1=x_1+iy_1$ и

$z_2=x_2+iy_2$, то согласно определению произведением этих чисел $z_1 \cdot z_2$ называется комплексное число

$$z=(x_1x_2-y_1y_2)+i(x_1y_2+x_2y_1).$$

Рассмотрим геометрическую интерпретацию действия умножения с помощью записи комплексных чисел в тригонометрической форме. Пусть

$$z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$
$$z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2).$$

Тогда

$$z=z_1\cdot z_2=\rho_1\rho_2[(\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)+$$
$$+i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2+\cos\varphi_2\sin\varphi_1)]=$$
$$=\rho_1\rho_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)].$$

Таким образом, если радиус-вектор r изображает комплексное число $z=z_1\cdot z_2$, а радиусы-векторы r_1 и r_2— комплексные числа z_1 и z_2, то радиус-вектор r получается из r_1 и r_2 следующими операциями: радиус-вектор r_1 поворачивается на угол φ_2 против часовой стрелки, если $\varphi_2>0$, или по часовой стрелке, если $\varphi_2<0$, и после этого его длина увеличивается в ρ_2 раз. Другими словами, если α_{φ_2}— вращение плоскости вокруг начала координат на угол φ_2, а β_{ρ_2}— преобразование гомотетии с коэффициентом ρ_2 и центром в начале координат, то вектор r получается из вектора r_1 последовательным применением преобразований α_{φ_2} и β_{ρ_2}. Таким образом,

$$r=\beta_{\rho_2}[\alpha_{\varphi_2}(r_1)].$$

Совершенно аналогично, если α_{φ_1} — вращение вокруг начала координат на угол φ_1, а β_{ρ_1} — преобразование гомотетии с коэффициентом ρ_1 и центром в начале координат, то вектор r получается из вектора r_2 последовательным применением преобразований α_{φ_1} и β_{ρ_1}:

$$r=\beta_{\rho_1}[\alpha_{\varphi_1}(r_2)].$$

Обратимся теперь к геометрической интерпретации действия деления двух комплексных чисел: $z_1=\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$, $z_2=\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$. Если $z=\frac{z_1}{z_2}$ — частное от

деления z_1 на z_2, то

$$z=\frac{z_1\cdot\overline{z_2}}{z_2\cdot\overline{z_2}}=\frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)\,\rho_2(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)\,\rho_2(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)}=$$

$$=\frac{\rho_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)(\cos(-\varphi_2)+i\sin(-\varphi_2))}{\rho_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)(\cos(-\varphi_2)+i\sin(-\varphi_2))}=$$

$$=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Таким образом,

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Обозначим через α_{φ_1} и $\alpha_{-\varphi_2}$ вращения плоскости вокруг начала координат соответственно на углы φ_1 и $-\varphi_2$, а через β_{ρ_1} и $\beta_{\frac{1}{\rho_2}}$ — преобразования гомотетии с центром в начале координат и коэффициентами ρ_1 и $\frac{1}{\rho_2}$. Пусть, далее, r, r_1, r_2 — радиусы-векторы, отвечающие соответственно комплексным числам z, z_1, $\overline{z_2}$. Тогда вектор r получается из вектора r_1 последовательным применением преобразований $\alpha_{-\varphi_2}$ и $\beta_{\frac{1}{\rho_2}}$ или из вектора r_2 последовательно выполненными преобразованиями $\alpha_{-\varphi_1}$ и β_{ρ_1}, т. е.

$$r=\beta_{\frac{1}{\rho_2}}[\alpha_{-\varphi_2}(r_1)]$$

или

$$r=\beta_{\rho_1}[\alpha_{\varphi_1}(r_2)].$$

§ 13. Линейная функция комплексного переменного и простейшие преобразования плоскости

Пусть каждому комплексному числу $z=x+iy$ по некоторому правилу ставится в соответствие комплексное число $z'=x'+iy'$. Тогда говорят, что на совокупности всех комплексных чисел или, что то же самое, на комплексной плоскости определена функция комплексного переменного $z'=f(z)$. Комплексная функция, закон соответствия которой дается формулой

$$z'\equiv f(z)=az+b,$$

где a и b — постоянные комплексные числа, называется *линейной*.

Поскольку комплексные числа отождествлены с точками плоскости, то всякая комплексная функция может одновременно рассматриваться как преобразование точек плоскости. Задачей настоящего параграфа как раз и является описание такого преобразования с помощью простейших преобразований плоскости, изученных в § 1.

Итак, пусть дана линейная функция

$$z' = az + b.$$

Если $a=0$, то функция $z'=b$ является постоянной, поскольку любому комплексному числу z она относит комплексное число b. Преобразование плоскости, соответствующее этой функции, переводит всю плоскость в одну и ту же точку b.

В дальнейшем мы исключим из рассмотрения это тривиальное преобразование и постоянно будем считать, что $a \neq 0$.

Пусть

$$a = |a|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

— запись комплексного числа a в тригонометрической форме. Обозначим через $\boldsymbol{r}'$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{h}$ радиусы-векторы, отвечающие числам z', z, b. Пусть, далее, $\beta_{|a|}$ — преобразование гомотетии с центром в точке $z=0$ и коэффициентом $|a|$, α_φ — вращение плоскости на угол φ вокруг точки $z=0$ и, наконец, γ_b — параллельный перенос плоскости на вектор $\boldsymbol{h}$. Нетрудно видеть, что точка z' — конец вектора $\boldsymbol{r}'$ — получается из точки z — конца вектора $\boldsymbol{r}$ — с помощью последовательно выполненных преобразований: вращения α_φ, подобия β_a и параллельного переноса γ_b.

Функцию

$$z' = az + b$$

часто называют *линейной функцией первого рода*. Таким образом, линейной функцией первого рода на плоскости соответствует преобразование, состоящее в последовательном выполнении преобразований вращения вокруг точки $z=0$, гомотетии с центром в точке $z=0$ и параллельного переноса. При этом вращение и гомотетия определяются числом a, а параллельный перенос — числом b.

Отметим особо некоторые частные случаи.

а) $|a|=1$, $b=0$ — вращение плоскости вокруг точки $z=0$ на угол, равный аргументу числа a.

б) a — вещественное положительное число, $b=0$ — преобразование гомотетии с центром в точке $z=0$ и коэффициентом a.

в) $a=1$ — параллельный перенос на вектор $\boldsymbol{h}$.

Функция

$$z'=a\bar{z}+b$$

называется линейной функцией второго рода. Рассмотрим сначала частный случай $a=1$, $b=0$. Тогда функция

$$z'=\bar{z}$$

относит каждой точке z симметричную ей относительно оси x точку $\bar{z}$. Таким образом, функция

$$z'=\bar{z}$$

описывает преобразование симметрии относительно оси x. Отсюда легко видеть, что общей линейной функции второго рода соответствует преобразование плоскости, состоящее в последовательном выполнении симметрии в оси x, вращения вокруг точки $z=0$, гомотетии с центром в точке $z=0$ и параллельного переноса. Так же как и в случае линейной функции первого рода, угол вращения равен аргументу числа a, коэффициент подобия равен модулю числа a и, наконец, вектор параллельного переноса определяется числом b.

§ 14. Дробно-линейная функция комплексного переменного и связанные с ней точечные преобразования плоскости

Функции комплексного переменного, заданные с помощью формул

$$z'=\frac{az+b}{cz+d}, \tag{1}$$

$$z'=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}, \tag{2}$$

где a, b, c, d — некоторые постоянные комплексные числа и

$$ad-bc\neq 0,$$

называются соответственно *дробно-линейными функциями первого и второго рода.*

Рассмотрим функции вида

$$z' = \frac{r^2}{z} \qquad (3$$

и

$$z' = \frac{r^2}{\bar{z}}, \qquad (4)$$

где r — некоторая положительная постоянная.

Для функции (4) определяющую ее формулу можно записать так:

$$z' = \frac{r^2 z}{\bar{z} \cdot z} = \frac{r^2}{|z|^2} z.$$

Отсюда вытекает, что преобразование плоскости, соответствующее функции

$$z' = \frac{r^2}{\bar{z}},$$

относит точке z точку z', лежащую на луче с вершиной в точке $z=0$, проходящем через точку z, и такую, что для модуля чнсла z' справедлива формула

$$|z'| = \frac{r^2}{|\bar{z}|} = \frac{r^2}{|z|}.$$

Отсюда следует, что z' получается из точки z инверсией с центром в точке $z=0$ и радиусом r.

Таким образом, функцин $z' = \frac{r^2}{\bar{z}}$ соответствует преобразование инверсии с центром в точке $z=0$ и радиусом r.

Для функции (3) определяющую ее формулу записываем так:

$$\bar{z}' = \frac{r^2}{z}.$$

С помощью рассмотрений, проведенных выше, легко заключаем, что функции

$$z' = \frac{r^2}{z}$$

соответствует преобразование плоскости, состоящее в последовательном выполнении симметрии относительно оси x и инверсии с центром в точке $z=0$ и радиусом r.

Имеет место теорема.

Теорема 1. *На комплексной плоскости преобразование инверсии* φ *радиуса* r *с центром в точке* d *задается функцией*

$$z' = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{d}} + d. \tag{5}$$

Аналогично функция

$$z' = \frac{r^2}{z - d} + d \tag{6}$$

задает преобразование инверсии с центром в точке d *и отражение в прямой, параллельной оси* x *и проходящей через точку* d.

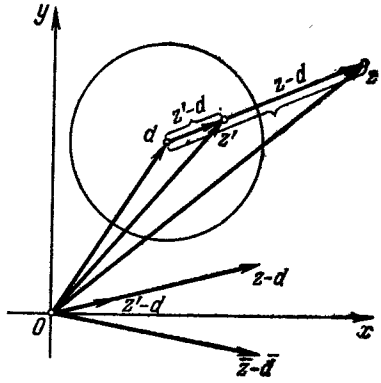

Рис. 65.

Доказательство. Пусть инверсия φ переводит точку z в точку z' (рис. 65). По определению инверсии имеем

$$|z' - d| = \frac{r^2}{|z - d|} = \frac{r^2}{|\bar{z} - \bar{d}|}. \tag{7}$$

Далее, числа $z - d$ и $z' - d$ имеют равные аргументы. Поэтому числа $z' - d$ и $\bar{z} - \bar{d}$ имеют аргументы, отличающиеся лишь знаком. Следовательно, используя правило умножения комплексных чисел в тригонометрической форме, получим

$$(z' - d)(\bar{z} - \bar{d}) = |z' - d|\,|\bar{z} - \bar{d}|.$$

Вместе с соотношением (7) это дает

$$z' - d = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{d}}.$$

Отсюда

$$z' = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{d}} + d.$$

Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Теорема 2. *Дробно-линейные функции второго рода*

$$z' = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

при условии $c \neq 0$ *описывают преобразование комплексной плоскости, состоящее в последовательном выполнении следующих преобразований:*

1) *инверсии с центром в точке* $-\frac{\bar{d}}{\bar{c}}$ *и радиусом* 1;

2) *поворота плоскости на угол, равный аргументу числа* $\frac{bc-ad}{c^2}$;

3) *гомотетии с коэффициентом, равным модулю числа* $\frac{bc-ad}{c^2}$;

4) *параллельного переноса на вектор, равный числу* $\frac{a}{c}+\frac{\bar{d}(bc-ad)}{c^2\bar{c}}$.

Доказательство. Дробно-линейную функцию (2) можно записать так:

$$z'=\left(\frac{1}{\bar{z}+\frac{d}{c}}-\frac{\bar{d}}{\bar{c}}\right)\frac{bc-ad}{c^2}+\left[\frac{a}{c}+\frac{\bar{d}(bc-ad)}{c^2\bar{c}}\right]. \qquad (8)$$

Из формулы (8) справедливость теоремы 2 вытекает непосредственно.

Для дробно-линейных функций первого рода имеет место аналогичная теорема. Единственное различие состоит в том, что между преобразованиями инверсии и поворота делается дополнительно отражение в прямой, проходящей через точку $-\frac{d}{c}$, параллельной оси x.

Если для дробно-линейных функций (1) и (2) коэффициент c равен нулю, то они сводятся к линейным функциям, рассмотренным в § 13.

ГЛАВА III

ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ. ГЕОМЕТРИИ ЕВКЛИДА И ЛОБАЧЕВСКОГО

В этой главе будет дано краткое построение геометрий Евклида и Лобачевского, исходя из теоретико-групповой точки зрения на геометрию. Этот подход к изучению различных геометрических теорий был предложен известным немецким математиком Ф. Клейном в 1872 г.

§ 15. Геометрия группы преобразований

1. Понятие группы. Одним из основных понятий алгебры является понятие группы.

Пусть G — совокупность элементов, природа которых нам безразлична. Например, элементами G могут быть числа, векторы, функции, преобразования и т. д. Тот факт, что нас не интересует конкретная природа элементов множества G, позволяет применять различные выводы о свойствах множества G к различным конкретным системам объектов.

Пусть теперь каждым двум элементам множества G, взятым в определенном порядке, по некоторому правилу отнесен элемент из G. Тогда говорят, что в G определена операция, которую обычно называют умножением и обозначают точкой. Если двум элементам a и b из G сопоставлен элемент c из G, то это записывают так:

$$c = a \cdot b.$$

Элемент c обычно называют произведением элементов a и b. Из определения операции не вытекает, что всегда $a \cdot b$ равно $b \cdot a$.

Итак, пусть в множестве G введена операция умножения.

Говорят, что G образует *группу* относительно этой операции, если выполняются следующие требования (аксиомы группы):

1. Справедлив закон ассоциативности, т. е. для любых трех элементов a, b, c из G всегда имеет место равенство

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

2. Существует такой элемент e из G, что для любого другого элемента a множества G имеет место равенство

$$a \cdot e = a.$$

Элемент e называется *единицей группы*.

3. Для любого элемента a из G найдется такой элемент x множества G, что

$$a \cdot x = e.$$

Элемент x называется *обратным* элементу a и обозначается a^{-1}.

Отметим ряд важных простых предложений, непосредственно вытекающих из определения группы.

а) Из аксиомы 1 следует, что произведения $(a \cdot b) \cdot c$ и $a \cdot (b \cdot c)$ всегда равны между собой. Поэтому элемент группы G, равный $(a \cdot b) \cdot c$ или $a \cdot (b \cdot c)$, можно обозначать просто $a \cdot b \cdot c$.

б) Если e — единица группы, то для любого элемента a из G имеет место равенство

$$e \cdot a = a.$$

Далее, для всякого элемента a из группы G обратный элемент a^{-1}, помимо равенства

$$a \cdot a^{-1} = e,$$

удовлетворяет еще и равенству

$$a^{-1} \cdot a = e.$$

Докажем предложение б). На основании аксиом 2 и 3 имеем

$$a^{-1} \cdot a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot e = a^{-1}.$$

Пусть $(a^{-1})^{-1}$ — обратный элемент для a^{-1}, т. е.

$$a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = e.$$

Тогда

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot (a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1}) = a^{-1} \cdot (a^{-1})^{-1} = e.$$

Отсюда

$$(a^{-1}\cdot a)\,e=e \quad \text{или} \quad a^{-1}\cdot a=e.$$

Последнее равенство показывает, что $(a^{-1})^{-1}=a$.
Далее,

$$e\cdot a=a\cdot a^{-1}\cdot a,$$

но по уже доказанному имеем

$$a^{-1}\cdot a=e.$$

Поэтому

$$e\cdot a=a\cdot e=a.$$

Итак, утверждение б) доказано. Одновременно мы показали, что

$$(a^{-1})^{-1}=a.$$

в) В группе G каждое из уравнений

$$a\cdot x=b, \tag{1}$$

и

$$y\cdot a=b \tag{2}$$

относительно x и y имеет решение и притом единственное.

Отсюда, в частности, следует единственность единицы в группе и единственность обратного элемента, поскольку e является решением уравнения $a\cdot x=a$, а a^{-1} — решением уравнения $a\cdot x=e$.

Нетрудно видеть, что элементы $a^{-1}\cdot b$ и $b\cdot a^{-1}$ являются соответственно решениями уравнений (1) и (2).

Если x — какое-нибудь решение уравнения (1), то

$$a\cdot x=b.$$

Отсюда

$$a^{-1}\cdot(a\cdot x)=a^{-1}\cdot b,$$

и мы имеем $x=a^{-1}\cdot b$. Аналогично устанавливается, что уравнение (2) всегда имеет также единственное решение $y=ba^{-1}$.

Подмножество H группы G, удовлетворяющее условиям группы относительно операции, рассматривающейся в группе G, называется *подгруппой* группы G. Очевидно, что всякая подгруппа содержит всегда единицу группы и вместе с каждым элементом обратный ему.

Укажем примеры групп.

1. Совокупность всех целых чисел относительно сложения образует группу. Если m — некоторое целое число, то совокупность чисел вида km, $k=0, \pm1, \pm2, \ldots$, образует подгруппу этой группы.

2. Совокупность всех вещественных чисел, из которой исключен нуль, образует группу относительно умножения. Совокупность рациональных чисел, отличных от нуля, образует подгруппу этой группы.

3. Совокупность всех радиусов-векторов плоскости образует группу относительно сложения. Совокупность

радиусов-векторов, лежащих на одной прямой, образует ее подгруппу.

4. Совокупность всех не равных нулю комплексных чисел образует группу относительно умножения. Ее подгруппами, например, являются совокупность комплексных чисел, модули которых равны единице, и совокупность вещественных чисел, отличных от нуля.

2. Группа преобразований множества. Пусть M — произвольное множество. Его элементы будем обозначать буквами x, y, z, ... или x', y', z', ... Каждому элементу x множества M поставим в соответствие некоторый элемент x' множества M. Тем самым определяется *преобразование множества M в себя*. Преобразования будем записывать так:

$$x' = f(x)$$

или кратко одной буквой f. Элемент x' называется *образом* элемента x. Совокупность всех образов $x' = f(x)$, когда x пробегает множество M, будем обозначать $f(M)$. Очевидно, что $f(M)$ или совпадает с M, или составляет его часть.

Преобразование f множества M в себя называется *взаимно однозначным преобразованием M на себя*, если выполняются следующие требования:

1. Разным элементам x_1 и x_2 множества M соответствуют разные образы $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

2. Множество $f(M)$ совпадает с множеством M.

Ниже мы будем рассматривать только взаимно однозначные преобразования множества M. Поэтому под преобразованиями множества M будут всегда подразумеваться взаимно однозначные преобразования.

Пусть f — преобразование множества M. Так как $f(M)=M$, то для любого $x' \in M$ можно найти x и притом только один такой, что

$$x' = f(x)$$

(единственность x вытекает из условия 1 взаимной однозначности преобразования f). Тем самым по преобразованию f строится взаимно однозначное преобразование $x=\varphi(x')$. Оно называется *обратным для f*. Очевидно, что обратное преобразование для данного преобразования всегда единственно. Оно обозначается f^{-1}.

Пусть даны два преобразования f_1 и f_2. Тогда каждый элемент x множества M преобразованиями f_1 и f_2 перево-

дится последовательно сначала в $x'=f_1(x)$, а затем в $x''=f_2(x')$. Соответствие f:

$$x''=f(x),$$

как легко видеть, есть взаимно однозначное преобразование M. Оно называется *произведением двух данных преобразований* f_1 *и* f_2, взятых в определенном порядке, и может быть записано символически так:

$$f(x)=f_2(f_1(x)).$$

Произведение преобразований, вообще говоря, зависит от порядка, в котором они производятся, т. е., вообще говоря, $f_2(f_1(x))\neq f_1(f_2(x))$.

Преобразование $e(x)=x$, оставляющее все элементы неподвижными, называется *тождественным*. Если f — данное преобразование и f^{-1}— обратное к нему, то, как легко видеть, при любом x из M справедливы соотношения

$$f(f^{-1}(x))=x=e(x), \qquad f^{-1}(f(x))=x=e(x).$$

Условимся через $f_2\cdot f_1$ обозначать произведение преобразований f_1, f_2 множества M, если первым производится преобразование f_1, а вторым f_2, а через $f_1\cdot f_2$ — произведение f_1 и f_2, когда f_2 производится первым.

Имеет место

Т е о р е м а 1. *Совокупность всех взаимно однозначных преобразований множества* M *на себя образует группу, если произведение любых двух преобразований понимать так, как это было только что определено.*

Действительно, в совокупности всех взаимно однозначных преобразований M на себя для каждой пары преобразований f_1 и f_2, взятых в определенном порядке, определено их произведение

$$f=f_2\cdot f_1,$$

являющееся также взаимно однозначным преобразованием M на себя. Проверка аксиом, характеризующих группу, здесь очень проста.

1. Если f_1, f_2, f_3— данные преобразования множества M, то

$$(f_3\cdot f_2)\cdot f_1=f_3\cdot(f_2\cdot f_1).$$

Действительно, если $x'=f_1(x)$, $x'=f_2(x)$, $x'=f_3(x)$ — данные преобразования, то $(f_3\cdot f_2)\cdot f_1$ и $f_3\cdot(f_2\cdot f_1)$ оба сводятся к преобразованию $f_3[f_2(f_1(x)]$.

Следовательно, произведение преобразований всегда подчиняется ассоциативному закону.

2. Тождественное преобразование $e(x)=x$ играет роль единицы группы. Действительно, для любого преобразования $x'=f(x)$ и любого x из M имеем

$$x'=f(e(x))=f(x).$$

Отсюда и следует, что $f\cdot e=f$.

3. Для любого преобразования f существует преобразование g такое, что

$$f\cdot g=e.$$

Именно, таким преобразованием g служит преобразование, обратное для f, т. е. $g=f^{-1}$.

Теорема доказана.

Группу всех взаимно однозначных преобразований множества M будем обозначать $G(M)$.

Любую подгруппу H группы $G(M)$ будем называть *группой преобразований множества* M. Поскольку тождественное преобразование принадлежит любой подгруппе H и закон ассоциативности также выполняется всегда для любых трех преобразований f_1, f_2, f_3, то подмножество преобразований, входящих в H, будет группой преобразований M, если 1) для любых преобразований f_1 и f_2 из H их произведение также принадлежит H; 2) вместе с любым преобразованием f множеству H принадлежит преобразование f^{-1}.

3. Геометрия данной группы. Пусть M — некоторое множество произвольных элементов и H — некоторая группа его преобразований.

В целях наглядности будем называть M пространством, а его элементы — точками. Совокупность точек будем называть *фигурой*.

Фигуру A назовем *эквивалентной или равной фигуре* B, если существует преобразование f в группе H, переводящее A в B.

Отношение эквивалентности фигур обладает следующими важными свойствами:

1. *Всякая фигура* A *эквивалентна самой себе.*

Действительно, единица группы H — тождественное отображение множества M на себя — переводит A в A.

2. *Если фигура* A *эквивалентна фигуре* B, *то и, обратно, фигура* B *эквивалентна фигуре* A.

Действительно, если фигура A преобразованием f из группы H переводится в B, то, так как обратное к f преобразование f^{-1} также принадлежит H, то f^{-1} переводит фигуру B в фигуру A.

3. *Если фигура A эквивалентна фигуре B, а фигура B эквивалентна фигуре C, то фигура A эквивалентна фигуре C.*

Если преобразование f из H переводит A в B, а преобразование g переводит B в C, то преобразование $g \cdot f$ переводит A в C, и так как $g \cdot f$ принадлежит H (H — группа), то A эквивалентна C.

Отношение эквивалентности разбивает все фигуры на классы эквивалентных между собой фигур, причем всякая фигура принадлежит одному и только одному классу.

Теоретико-групповая точка зрения, положенная Ф. Клейном в определение геометрии, состоит в том, что *геометрическими* свойствами фигур пространства M и *геометрическими* величинами этих фигур считаются те, которые инвариантны относительно любого преобразования из данной группы H и которые, следовательно, одинаковы у всех эквивалентных фигур.

Система предложений о свойствах фигур и величин, инвариантных относительно всех преобразований группы H, называется согласно Ф. Клейну *геометрией группы H*.

Концепция Клейна рассматривать различные геометрии как теории инвариантов соответствующих групп дала возможность вскрыть глубокие связи между различными геометриями: проективной, аффинной, евклидовой и геометрией Лобачевского, которые были построены и изучены к восьмидесятым годам XIX века. Подробное изложение этих вопросов читатель может найти в книге Н. В. Ефимова «Высшая геометрия».

В следующих двух параграфах мы покажем, как с теоретико-групповой точки зрения строятся геометрии Евклида и Лобачевского.

§ 16. Евклидова геометрия

Мы ограничимся рассмотрением евклидовой геометрии на плоскости. В § 1 на евклидовой плоскости изучались движения, которые представляли собой взаимно однозначные преобразования плоскости, сохраняющие расстояния между точками. В том же § 1 приводилось понятие

равных или, как мы говорили выше в п. 3 § 15, эквивалентных фигур в евклидовой геометрии. Именно, за эквивалентные фигуры в евклидовой геометрии принимались такие, которые преобразовывались друг в друга с помощью движений. Пусть f и g — два движения. Тогда преобразование $h=g\cdot f$ также является движением. Действительно, h является взаимно однозначным преобразованием; далее, пусть A' и B' — образы точек A и B относительно преобразования h. Тогда

$$A'=h(A)=g(f(A)), \qquad B'=h(B)=g(f(B)).$$

Поэтому если $r(A, B)$ — расстояние между точками A и B на плоскости, то

$$r(A', B')=r(g[f(A)], g[f(B)])=r(f(A), f(B))=r(A, B).$$

Отсюда и следует, что $h=g\cdot f$ есть движение. Для любого движения f существует обратное преобразование f^{-1}, поскольку f — взаимно однозначное преобразование плоскости. Пусть A и B — любые точки плоскости и $A'=f^{-1}(A)$, $B'=f^{-1}(B)$. Так как движение f является обратным преобразованием для f^{-1}, то

$$A=f(A'), \qquad B=f(B')$$

и, следовательно,

$$r(A, B)=r(f(A'), f(B'))=r(A', B').$$

Отсюда вытекает, что f^{-1} есть движение.

Таким образом, движения образуют группу преобразований плоскости. Геометрия этой группы и называется евклидовой геометрией плоскости.

Поскольку любое движение (см. § 1) есть произведение частных видов движений: вращения, параллельного переноса и еще, может быть, симметрии в прямой (при этом допускаются вращения на нулевой угол и параллельные переносы на нулевой вектор, сводящиеся к тождественному преобразованию), то евклидову геометрию можно определить как систему предложений о свойствах фигур и величин, инвариантных относительно всевозможных вращений, параллельных переносов и симметрий в прямых, а также произведений этих преобразований.

В § 13, исходя из того, что точки евклидовой плоскости были отождествлены с комплексными числами, мы показали, что линейные функции комплексного переменного

первого и второго рода

$$z' = az + b, \tag{1}$$

$$z' = a\bar{z} + b \tag{2}$$

определяют на плоскости взаимно однозначные преобразования, являющиеся движениями, если модуль числа a равен единице. Докажем, что с помощью функций (1) и (2) можно задать любое движение на плоскости. Действительно, пусть f — произвольное движение плоскости и пусть

$$f = p \cdot g \quad \text{или} \quad f = s \cdot p \cdot g,$$

где g — вращение вокруг точки $D(d_1, d_2)$ на угол α, p — параллельный переиос на вектор $\overline{OB}$ с координатами b_1, b_2 и, наконец, s — симметрия в прямой l, проходящей через точку $C(c_1, c_2)$ и составляющей угол γ с положительным направлением оси Ox.

Вращению g соответствует линейная функция

$$z' = G(z) = a(z - d) + d,$$

где

$$a = \cos\alpha + i\sin\alpha, \qquad d = d_1 + id_2,$$

параллельному переносу p — линейная функция

$$z' = P(z) = z + b,$$

где

$$b = b_1 + ib_2,$$

и, наконец, симметрии s в прямой l — линейная функция

$$z' = S(z) = u(\bar{z} - \bar{c}) + c,$$

где

$$u = \cos 2\gamma + i\sin 2\gamma, \qquad c = c_1 + ic_2, \ \bar{c} = c_1 - ic_2.$$

Мы предоставляем читателю самостоятельно убедиться в справедливости этих фактов.

Таким образом, функция, соответствующая f в случае, когда $f = p \cdot g$, имеет вид

$$z' = P[G(z)] = G(z) + b = a(z - d) + d + b = az + d + b - ad,$$

или окончательно

$$z' = az + (d + b - ad),$$

причем $|a| = \sqrt{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = 1$.

Если $f=s\cdot p\cdot g$, то соответствующая функция имеет вид

$$z'=S[P(G(z))]=S[G(z)+b]=u([\overline{G(z)+b}]-\bar{c})+c=$$
$$=u(\bar{a}\cdot\bar{z}+(\bar{d}+\bar{b}-\bar{a}\bar{d})-\bar{c})+c,$$

или окончательно

$$z'=(u\cdot\bar{a})\bar{z}+[u(\bar{d}+\bar{b}-\bar{a}\bar{d}-\bar{c})+c],$$

причем

$$|u\bar{a}|=|\cos(2\gamma-\alpha)+i\sin(2\gamma-\alpha)|=1.$$

Из всех наших рассмотрений вытекает

Теорема 1. *Между движениями евклидовой плоскости и линейными функциями комплексного переменного первого и второго рода*

$$z'=az+b$$

и

$$z'=a\bar{z}+b$$

при условии, что $|a|=1$, *а и* b *— постоянные числа, существует взаимно однозначное соответствие; при этом если движение* f *есть произведение движений* f_1 *и* f_2:

$$f=f_2\cdot f_1,$$

$F(z)$ *— функция, соответствующая* f, $F_1(z)$ *— функция, соответствующая* f_1, *и* $F_2(z)$ *— функция, соответствующая* f_2, *то*

$$F(z)=F_2(F_1(z)). \tag{3}$$

В подобной записи это означает следующее: если

$$F_1(z)=\begin{cases} a_1z+b_1, & (4)\\ a_1\bar{z}+b_1, & (5)\end{cases}\qquad F_2(z)=\begin{cases} a_2z+b_2, & (6)\\ a_2\bar{z}+b_2, & (7)\end{cases}$$

то соответственно

$$F_2(F_1(z))=\begin{cases} a_2F_1(z)+b_2=\begin{cases} a_2a_1z+(a_2b_1+b_2),\\ a_2a_1\bar{z}+(a_2b_1+b_2);\end{cases}\\ a_2\overline{F_1(z)}+b_2=\begin{cases} a_2\bar{a}_1\bar{z}+(a_2\bar{b}_1+b_2),\\ a_2\bar{a}_1z+(a_2\bar{b}_1+b_2).\end{cases}\end{cases} \tag{8}$$

Произведения функций (4), (6) и (5), (7) дают линейную функцию первого рода, а произведения функций (4), (7) и (5), (6) — второго рода. Модуль коэффициента при z или $\bar{z}$ у всех четырех функций, очевидно, равен единице.

Формулы (3) — (8) каждой паре линейных функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ ставят в соответствие функцию $F(z)$, которую мы будем называть *произведением функций* $F_1(z)$ и $F_2(z)$.

Относительно так введенного умножения совокупность линейных функций первого и второго рода образует группу. Проверка этого факта чрезвычайно проста. Из самого определения умножения вытекает, что оно подчиняется закону ассоциативности. Далее, функция $F(z)=z$, соответствующая тождественному преобразованию плоскости, играет роль единицы группы и, наконец, функция

$$Q(z)=\begin{cases}\frac{1}{a}z-\frac{b}{a}, & \text{если} \quad F(z)=az+b,\\ \frac{1}{\bar{a}}\bar{z}-\frac{b}{\bar{a}}, & \text{если} \quad F(z)=\bar{a}\bar{z}+b,\end{cases} \tag{9}$$

такова, что

$$FQ(z)\equiv F(Q(z))=z,$$

т. е. $Q(z)=F^{-1}(z)$.

Рассмотрим совокупность линейных функций первого и второго рода, у которых коэффициент при переменной z имеет модуль, равный единице. Тогда из формул для произведения линейных функций (8) и формулы (9) для обратной функции вытекает, что эта совокупность образует подгруппу введенной выше группы линейных функций. Эту подгруппу будем обозначать E. Очевидно, что E есть группа преобразований множества всех комплексных чисел.

Из всех рассмотрений, проведенных выше, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Теория инвариантов группы E есть евклидова геометрия плоскости.*

§ 17. Геометрия Лобачевского

В первой половине XIX века выдающийся русский математик Н. И. Лобачевский решил труднейшую многовековую проблему геометрии о независимости аксиомы параллельности от прочих аксиом евклидовой геометрии. Развитые в работах Н. И. Лобачевского новые идеи оказали огромное влияние на последующее развитие математики.

Система аксиом, лежащая в основе геометрии Лобачевского, получается из системы аксиом евклидовой геометрии заменой аксиомы параллельности новой аксиомой, которая представляет собой предложение, противоположное

евклидовой аксиоме о параллельных. Формулировка этого предложения такова: «В любой плоскости α можно через каждую точку A, не принадлежащую прямой a, провести по крайней мере две различные прямые a' и a'' так, что они не имеют общих точек с прямой a».

Ниже мы укажем одну из интерпретаций геометрии Лобачевского, предложенную французским математиком А. Пуанкаре.

На евклидовой плоскости рассмотрим некоторую прямую l. Не нарушая общности, можно считать, что прямая l совпадает с осью x. Назовем верхней полуплоскостью совокупность всех точек плоскости x, y, у которых координата y удовлетворяет неравенству $y>0$.

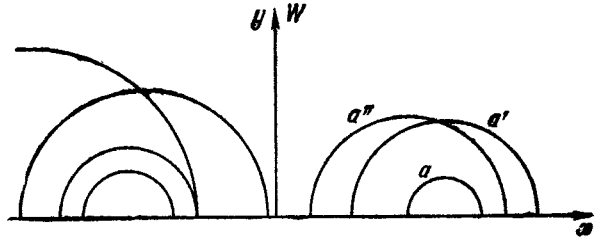

Рис. 66.

Точки верхней полуплоскости принимаются за точки плоскости Лобачевского, а сама плоскость Лобачевского есть верхняя полуплоскость евклидовой плоскости. Отметим, что точки оси x не являются точками плоскости Лобачевского. Прямыми плоскости Лобачевского (рис. 66) считаются евклидовы полуокружности с центрами на оси x и лучи с вершинами на оси x, перпендикулярные этой оси.

Две фигуры A и B считаются равными или эквивалентными, если существует конечное число таких преобразований $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m$, каждое из которых является инверсией с центром на оси x или отражением в прямой, перпендикулярной оси x, что преобразование $f=\varphi_m \cdot \varphi_{m-1} \cdot \ldots \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1$ переводит фигуру A в фигуру B.

То, что в интерпретации Пуанкаре выполнена аксиома Лобачевского, очевидно (рис. 67).

Обозначим через W верхнюю полуплоскость. Пусть, далее, H — совокупность преобразований, состоящая из

преобразований вида

$$f = \varphi_m \cdot \varphi_{m-1} \cdot \ldots \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1 \ (m \text{ — любое натуральное число}),$$

где $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — инверсии с центрами на оси x или отражения в прямой, перпендикулярной оси x.

Из свойств этих преобразований нам известно, что каждое из них преобразует верхнюю полуплоскость на себя взаимно однозначно. Следовательно, совокупность преобразований H состоит из взаимно однозначных преобразований верхней полуплоскости W на себя.

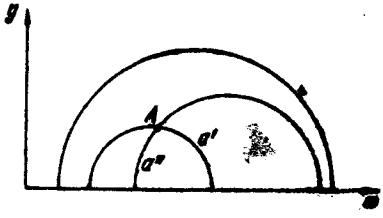

Рис. 67.

Докажем, что H есть группа преобразований множества W. Действительно, если f и g принадлежат H и

$$f = \varphi_m \cdot \varphi_{m-1} \cdot \ldots \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1,$$
$$g = \psi_n \cdot \psi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \psi_2 \cdot \psi_1,$$

то для произведения преобразований f и g имеем формулу

$$gf = \psi_n \cdot \psi_{n-1} \cdot \ldots \cdot \psi_2 \cdot \psi_1 \cdot \varphi_m \cdot \varphi_{m-1} \cdot \ldots \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1,$$

из которой следует, что $g \cdot f$ принадлежит совокупности преобразований H.

Так как дважды повторенные одна и та же инверсия или отражение в прямой φ приводят к тождественному преобразованию, то, очевидно,

$$\varphi^{-1} = \varphi$$

и, следовательно, для преобразования

$$g = \varphi_m \cdot \varphi_{m-1} \cdot \ldots \cdot \varphi_2 \cdot \varphi_1$$

из совокупности H преобразование

$$h = \varphi_1 \cdot \varphi_2 \cdot \ldots \cdot \varphi_m$$

будет обратным преобразованием. Преобразование h, очевидно, принадлежит H. Таким образом, согласно свойствам, характеризующим группу преобразований данного множества (см. п. 2 § 15), совокупность преобразований H относительно операции умножения образует группу преобразований верхней полуплоскости W.

Выше мы приняли W за плоскость Лобачевского, а преобразования группы H играют на плоскости Лобачев-

ского роль движений — по определению они совмещают равные (эквивалентные) фигуры.

Поэтому геометрию Лобачевского можно определить как теорию инвариантов группы преобразований H верхней полуплоскости W.

В заключение мы предлагаем читателю в качестве весьма полезной задачи сформулировать предмет геометрии Лобачевского с помощью дробно-линейных функций комплексного переменного так же, как это было сделано в § 15 для геометрии Евклида с помощью линейных функций комплексного переменного.

Подробное изложение вопросов, на которых мы останавливались в главе III, читатель может найти в книге Н. В. Ефимова «Высшая геометрия». Подробное изложение геометрии Лобачевского в модели Пуанкаре можно найти в книге А. С. Смогоржевского «О геометрии Лобачевского» (серия «Популярные лекции по математике», выпуск 23).

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 3

Глава I. **Инверсия и пучки окружностей**

§ 1. Простейшие преобразования плоскости . . . 5
§ 2. Стереографическая проекция. Бесконечно удаленная точка плоскости 11
§ 3. Инверсия 14
§ 4. Свойства инверсии 16
§ 5. Степень точки относительно окружности. Радикальная ось двух окружностей 24
§ 6. Приложение инверсии к решению задач на построение 30
§ 7. Пучки окружностей 38
§ 8. Строение эллиптического пучка 46
§ 9. Строение параболического пучка 48
§ 10. Строение гиперболического пучка 49
§ 11. Теорема Птоломея 52

Глава II. **Комплексные числа и инверсия**

§ 12. Геометрическое изображение комплексных чисел и действий над ними 55
§ 13. Линейная функция комплексного переменного и простейшие преобразовании плоскости 59
§ 14. Дробно-линейная функция комплексного переменного и связанные с ней точечные преобразования плоскости 61

Глава III. **Группы преобразований. Геометрии Евклида и Лобачевского**

§ 15. Геометрия группы преобразований 65
§ 16. Евклидова геометрия 71
§ 17. Геометрия Лобачевского 75

Илья Яковлевич Бакельман
Инверсия
М., 1966 г. 80 стр. с илл.
Редакторы: *А. Л. Вернер, В. В. Донченко.*
Техн. редактор *Л. А. Пыжова.*
Корректор *А. С. Бакулова.*

Сдано в набор 25/VII 1966 г. Подписано к печати 3/X 1966 г. Бумага $84\times108^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 2,5. Условн. печ. л. 4,2. Уч.-изд. л. 3,85. Тираж 75 000 экз. Т-12748. Цена 12 коп.
Заказ № 614.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Отпечатано с матриц
Первой Образцовой типографии
в Чеховском полиграфкомбинате
Зак. № 53

10 000 640/33

Цена 12 коп.

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вып. 1. **А. И. Маркушевич.** Возвратные последовательности.
Вып. 2. **И. П. Натансон.** Простейшие задачи на максимум и минимум.
Вып. 3. **И. С. Соминский.** Метод математической индукции.
Вып. 4. **А. И. Маркушевич.** Замечательные кривые.
Вып. 5. **П. П. Коровкин.** Неравенства.
Вып. 6. **Н. Н. Воробьев.** Числа Фибоначчи.
Вып. 7. **А. Г. Курош.** Алгебраические уравнения произвольных степеней.
Вып. 8. **А. О. Гельфонд.** Решение уравнений в целых числах.
Вып. 9. **А. И. Маркушевич.** Площади и логарифмы.
Вып. 10. **А. С. Смогоржевский.** Метод координат.
Вып. 11. **Я. С. Дубнов.** Ошибки в геометрических доказательствах.
Вып. 12. **И. П. Натансон.** Суммирование бесконечно малых величин.
Вып. 13. **А. И. Маркушевич.** Комплексные числа и конформные отображения.
Вып. 14. **А. И. Фетисов.** О доказательствах в геометрии.
Вып. 15. **И. Р. Шафаревич.** О решении уравнений высших степеней.
Вып. 16. **В. Г. Шерватов.** Гиперболические функции.
Вып. 17. **В. Г. Болтянский.** Что такое дифференцирование?
Вып. 18. **Г. М. Миракьян.** Прямой круговой цилиндр.
Вып. 19. **Л. А. Люстерник.** Кратчайшие линии.
Вып. 20. **А. М. Лопшиц.** Вычисление площадей ориентированных фигур.
Вып. 21. **Л. И. Головина и И. М. Яглом.** Индукция в геометрии.
Вып. 22. **В. Г. Болтянский.** Равновеликие и равносоставленные фигуры.
Вып. 23. **А. С. Смогоржевский.** О геометрии Лобачевского.
Вып. 24. **Б. И. Аргунов и Д. А. Скорняков.** Конфигурационные теоремы.
Вып. 25. **А. С. Смогоржевский.** Линейка в геометрических построениях.
Вып. 26. **Б. А. Трахтенброт.** Алгоритмы и машинное решение задач.
Вып. 27. **В. А. Успенский.** Некоторые приложения механики к математике.
Вып. 28. **Н. А. Архангельский и Б. И. Зайцев.** Автоматические цифровые машины.
Вып. 29. **А. Н. Костовский.** Геометрические построения одним циркулем.
Вып. 30. **Г. Е. Шилов.** Как строить графики.
Вып. 31. **А. Г. Дорфман.** Оптика конических сечений.
Вып. 32. **Е. С. Вентцель.** Элементы теории игр.
Вып. 33. **А. С. Барсов.** Что такое линейное программирование.
Вып. 34. **Б. Е. Маргулис.** Системы линейных уравнений.
Вып. 35. **Н. Я. Виленкин.** Метод последовательных приближений.
Вып. 36. **В. Г. Болтянский.** Огибающая.
Вып. 37. **Г. Е. Шилов.** Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).
Вып. 38. **Ю. А. Шрейдер.** Что такое расстояние?
Вып. 39. **Н. Н. Воробьев.** Признаки делимости.
Вып. 40. **С. В. Фомин.** Системы счисления.
Вып. 41. **Б. Ю. Коган.** Приложение механики к геометрии.
Вып. 42. **Ю. И. Любич и Л. А. Шор.** Кинематический метод в геометрических задачах.
Вып. 43. **В. А. Успенский.** Треугольник Паскаля.
Вып. 44. **И. Я. Бакельман.** Инверсия.